Modélisations
Analyse dimensionnelle et lois de similitude

1 - Modèles et simulations.

- Du modèle à la simulation

L'observation n'est pas toujours possible ni suffisante pour étudier un phénomène réel. Les causes principales en sont le manque de moyens techniques, financiers ou théoriques. La ***simulation*** est alors d'un grand secours pour approfondir l'étude. La simulation est l'expérimentation sur un ***modèle*** du phénomène que l'on veut étudier. Le modèle sur lequel s'appuie une simulation est fondé sur une théorie, c'est-à-dire une description abstraite de la réalité. Dans le cas où le problème physique est basé sur une théorie reconnue et éprouvée, la simulation sert à évaluer ou à vérifier le comportement de l'objet d'étude. De tels modèles servent à dimensionner des ouvrages ou à établir des essais de laboratoire en génie civil par exemple. Quand la théorie n'est pas assurée, la simulation permet, par confrontation avec la réalité, de tester sa validité. Les modèles sont de deux types, ***numérique*** et ***analogique***. De tels modèles existent dans beaucoup de disciplines mais nous nous limiterons ici à la description des simulations des phénomènes physiques.

Les simulations numériques

Les modèles numériques sont basés sur une formulation mathématique du problème à l'aide des lois de la physique et d'hypothèses complémentaires. Les résultats sont donnés par des solutions analytiques ou plus fréquemment par des calculs numériques sur ordinateur.

Les simulations analogiques

Les modèles analogiques sont des mécanismes physiques, présentant des analogies avec le phénomène décrit par la théorie. Ils sont utilisés lorsque les modèles numériques n'existent pas, ne sont pas assez performants ou ne sont pas utilisables par manque de calculateurs assez puissants. L'utilisation de conducteurs électriques pour modéliser l'écoulement de l'eau dans un milieu perméable, est un exemple de résolution analogique d'équations différentielles.

Parmi les modèles analogiques, les modèles réduits ont été très tôt et largement utilisés à cause leur ressemblance structurelle avec la réalité. On appelle ***prototype*** le corps physique que le modèle réduit représente à une plus petite échelle. Plus généralement, on entendra le mot prototype comme corps physique à modéliser numériquement ou analogiquement. Dans notre cas, le prototype est un ouvrage souterrain réel à modéliser.

L'élaboration d'un modèle

L'élaboration d'un modèle, numérique ou analogique, se fait en plusieurs étapes introduisant chacune, erreurs et incertitudes :

- Détermination des phénomènes et des paramètres
- Définition du prototype : caractéristiques dimensionnelles et structurelles
- Construction d'une théorie
- Réalisation du modèle

Pour un modèle numérique, aussi bien que pour un modèle analogique, la forme des équations issues de la théorie, donne avant toute résolution numérique et analogique, des renseignements sur les relations entre les variables du problème. L'étude de ces relations fait l'objet de l'analyse dimensionnelle, qui elle-même est à la base des théories de la similitude dimensionnelle.

2 - Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est l'étude de la forme générale des équations régissant un phénomène physique. Elle s'intéresse aux dimensions des variables intervenant dans les équations scientifiques. La propriété d'homogénéité des équations, c'est-à-dire leur indépendance par rapport au système d'unité, permet, à partir des relations entre les variables dimensionnelles de former un système équivalent de variables sans dimensions qui sont des produits des précédentes. Cette opération permet de réduire le nombre de variables décrivant le problème physique en ne considérant que ***des paramètres adimensionnels***.

Le théorème de Vaschy-Buckingham

Énoncé en 1914, il prouve que si un problème peut s'écrire en fonction de relations entre n variables dimensionnelles fondamentales, alors il existe des relations équivalentes fonctions de m produits adimensionnels indépendants formés à partir de ces variables. De plus il indique précisément le nombre m de produits adimensionnels indépendants que l'on peut former à partir des n variables dimensionnelles fondamentales du problème.

Pour un problème de dynamique sans considération thermodynamique, on a $m = n - 3$, pour un problème cinématique on a $m = n - 2$.

Détermination des paramètres adimensionnels

Dans un problème de mécanique, la détermination des paramètres (ou produits) adimensionnels est possible en utilisant le fait que chaque grandeur G soit le produit de puissances de trois grandeurs fondamentales : la longueur, la masse et le temps.

On note [G] les dimensions de la grandeur G et L, M, T les dimensions respectives des longueurs, masse et temps. [G] peut alors s'écrire sous la forme : $[G] = L^a\ M^b\ T^c$, par exemple pour une vitesse V, on a $[V] = L\ T^{-2}$.
Les paramètres dimensionnels peuvent alors être combinés en produits de puissances formant des paramètres de dimension $L^0\ M^0\ T^0=1$, donc adimensionnels. Il existe des méthodes systématiques pour déterminer une série de paramètres adimensionnels indépendants, mais on peut aussi les déterminer par tâtonnement.

Exemple : Système masse / ressort.
Faisons l'étude dimensionnelle d'un problème dynamique, celui d'un ressort de raideur k à l'extrémité duquel est placée une masse m. La masse est écartée de sa position d'équilibre d'une distance x_0 puis lâchée.
Les paramètres fondamentaux permettant de décrire le mouvement de la masse m sont :

Variable dimensionnelles	Dimensions
t : temps	T
x : position de la masse à l'instant t	L
x_0 : position initiale de la masse	L
m : masse	M
k : raideur du ressort.	MT^{-2}

Le théorème de Vaschy-Buckingham nous dit que le nombre de paramètres adimensionnels indépendants est 2 (5-3) car nous sommes dans le cas d'un problème dynamique.
Il faut donc trouver 2 combinaisons indépendantes de ces 5 paramètres fondamentaux.
On trouve facilement les deux paramètres adimensionnels suivants :

$$\frac{x}{x_0} \text{ et } \frac{t^2 k}{m}$$

Ainsi l'analyse dimensionnelle de ce problème d'oscillation de ressort nous indique que l'équation du mouvement de la masse m peut s'écrire à l'aide de ces deux seuls paramètres. L'analyse dimensionnelle ne permet pas de connaître précisément la relation qui décrit le mouvement mais elle prouve qu'elle existe et qu'elle est unique.

Il suffit de faire une seule expérience sur un cas particulier de système masse/ressort (en fixant x_0, k et m) pour connaître le comportement, c'est-à-dire les variations de x en fonction de t, de tout autre système de ce genre. On peut alors très bien choisir comme paramètres adimensionnels $\frac{x}{x_0}$ et $\sqrt{k/m}\,.\,t$ afin de faire apparaître clairement x et t (en prenant la racine carrée de $\frac{t^2 k}{m}$, on ne change pas la représentativité du paramètre qui est positif, car la transformation est bijective de R^+ dans R^+).

L'analyse dimensionnelle fait ainsi apparaître deux coefficients caractéristiques du système bien connu par ailleurs sous les noms d'amplitude notée A= x_0 *et* de pulsation notée $\omega=\sqrt{k/m}$ puisque nous avons à faire à un oscillateur harmonique sinusoïdal.

En effet, la résolution effective du problème en utilisant la relation fondamentale de la dynamique donne la relation suivante :

$$x=x_0 \cos \omega t \text{ où } \omega=\sqrt{k/m}$$

que l'on peut aussi écrire en fonction des paramètres adimensionnels déterminés précédemment :

$$\frac{x}{x_0} = \cos\sqrt{\frac{t^2k}{m}}$$

Dans ce problème, on aboutit facilement à une solution analytique du mouvement de la masse, l'analyse dimensionnelle n'apporte par conséquent pas d'élément réellement utile. Cependant il existe de très nombreux cas complexes où l'analyse dimensionnelle apporte des indications extrêmement précieuses. De plus ses applications sont variées.

Applications de l'analyse dimensionnelle

Exploitation d'expériences : La réduction du nombre de paramètres élargit la portée d'une expérience réalisée pour une configuration particulière. La détermination des produits adimensionnels indépendants permet donc de réduire considérablement le nombre d'expériences tout en donnant des résultats généraux.

Etablissement d'abaques : Les paramètres adimensionnels permettent d'élargir la portée d'un résultat par rapport à un calcul mené avec des variables dimensionnelles. De là vient l'intérêt des abaques établis en fonction de variables adimensionnelles.

Etablissement des lois de similitude : L'analyse dimensionnelle trouve aussi une puissante application dans la similitude dimensionnelle. En effet les relations de passage d'un prototype à un modèle réduit découlent directement d'une analyse dimensionnelle.

3 - Similitude dimensionnelle

La similitude dimensionnelle est l'étude des lois régissant le passage entre les grandeurs d'un modèle réduit et celles du prototype associé. L'analyse dimensionnelle est à la base de la détermination de ces lois.
On a vu que l'analyse dimensionnelle utilisait la propriété d'homogénéité des équations de la physique, c'est-à-dire leur indépendance par rapport au système d'unité. Or un problème de similitude revient à un problème de changement d'unité car dans les équations, le facteur d'échelle intervient de la même manière qu'un coefficient de changement d'unité de mesure. Cela implique une première propriété de la similitude.

Première propriété de la similitude et notation de Mandel
Les différentes échelles de longueur, masse, contrainte, etc., sont liées entre elles de la même manière que les unités de mesure cohérentes (c'est-à-dire permettant l'écriture d'équations homogènes) et elles restent les mêmes quelles que soient les longueurs, masses, contraintes mesurées. On peut donc chercher à définir pour chaque grandeur (et non chaque paramètre dimensionnel) du problème étudié, le facteur d'échelle permettant de passer du prototype au modèle réduit. Nous prendrons comme notation des facteurs d'échelle, celle utilisée par Mandel.

Notation de MANDEL : soit u_p une grandeur relative au prototype et u_m la grandeur correspondante pour le modèle réduit.
On note alors avec une étoile le rapport de ces deux grandeurs : $\overset{*}{u} = \frac{um}{up}$

$\overset{*}{u}$ est le facteur d'échelle attaché à la grandeur u.

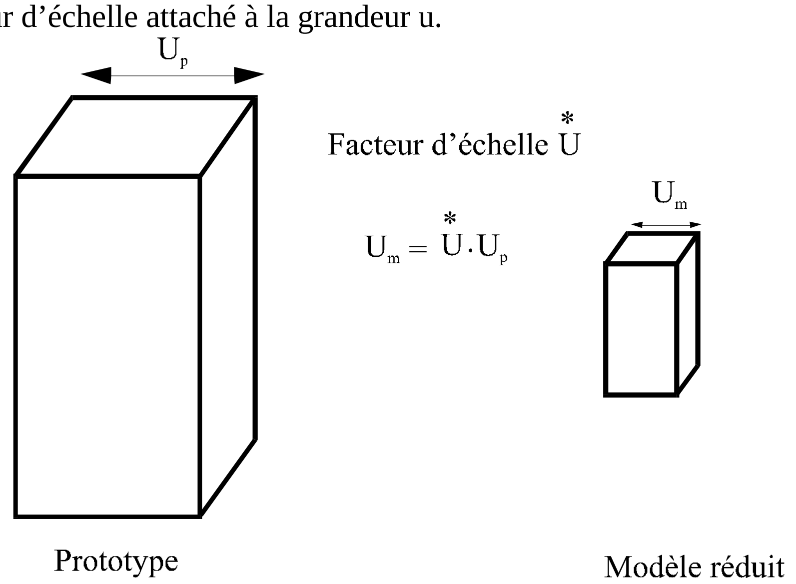

Figure 1 : Facteur d'échelle suivant la notation de Mandel.

Deuxième propriété et similitude complète

Dans un cas idéal, on déduit du théorème de Vaschy-Buckingham une deuxième propriété qui dit qu'un modèle réduit est représentatif du prototype si les paramètres adimensionnels décrivant complètement les deux systèmes, sont égaux simultanément. On dit dans ce cas que la similitude est *complète*.

Similitude restreinte et effet d'échelle

Il est souvent difficile, et parfois même impossible de réaliser une similitude complète. On est alors amené à négliger certains facteurs au bénéfice d'autres qui paraissent plus importants compte tenu des phénomènes que l'on veut observer. Dans ce cas on réalise une similitude *restreinte*.

Il est important de s'assurer pour une similitude restreinte que les phénomènes que l'on néglige aient la même importance dans le prototype et le modèle réduit. En effet, il peut arriver qu'un phénomène soit négligeable à l'échelle réelle et prépondérant à échelle réduite. Un exemple classique de ce genre de problème apparaît avec la tension superficielle qui n'a pas d'influence sur les vagues de l'océan, mais qui est prépondérante dans un modèle de port dont les vagues ont moins de 3 cm de hauteur.

On appelle *effets d'échelle* les influences différentes qu'un même phénomène peut prendre suivant les dimensions de l'objet d'étude. Un moyen de diminuer ces effets est d'augmenter le plus possible la taille du modèle réduit.

Les lois de la similitude

Pour établir les lois de la similitude, on ne s'intéresse plus aux paramètres particuliers à un problème, comme le diamètre d'un tunnel, mais aux grandeurs (comme les longueurs, les forces, les déformations etc.) et aux facteurs d'échelle associés. C'est-à-dire que l'on regroupe les paramètres par types. Par exemple tous les paramètres du type “longueur” seront affectés dans les lois de similitude d'un même facteur d'échelle. Ceci est la conséquence de la première propriété de la similitude que l'on a énoncé plus haut. Pour connaître les relations liant les facteurs d'échelle, on se base sur les lois connues de la physique. Ce sont ces lois, qui dans le cadre de la mécanique, sont détaillées ici. Elles ont pour origine les équations d'équilibre et les lois de comportement des matériaux.

Lois issues des équations d'équilibre de la mécanique

Pour que les conditions de similitude soient respectées, il faut que les équations de la mécanique restent identiques pour le modèle et le prototype. Cette identité nous conduit à la relation liant les facteurs d'échelle suivantes :

$\overset{*}{F} = \overset{*}{m}\overset{*}{a}$ issue de la relation fondamentale de la dynamique.

De plus, d'après les définitions de σ, ρ et a on a $\overset{*}{\sigma} = \dfrac{\overset{*}{F}}{\overset{*}{S}}$, $\overset{*}{\rho} = \dfrac{\overset{*}{m}}{\overset{*}{V}}$ et $\overset{*}{a} = \dfrac{\overset{*}{l}}{\overset{*}{t}^2}$

avec $\overset{*}{l}$ le facteur d'échelle lié aux longueurs (ou échelle de réduction du modèle).
De ces deux relations, on peut déduire les facteurs d'échelle de chaque grandeur moyennant certaines hypothèses sur le matériau (conservation de la masse volumique) et les forces de masse (centrifugation ou gravité terrestre).
Habituellement on suppose que le prototype et le modèle ont la même masse volumique. Ceci amène à écrire que $\overset{*}{\rho} = 1$.

Conditions de similitude en gravité terrestre

La modélisation sous gravité terrestre implique que g reste contant d'où $\overset{*}{g} = 1$. g étant homogène à une accélération on en déduit alors que $\overset{*}{\sigma} = \overset{*}{l}$ et que le facteur d'échelle sur le temps dynamique vérifie l'égalité $\overset{*}{t} = \overset{*}{l}^{1/2}$.

Conditions de similitude en centrifugeuse

La centrifugation a pour but d'augmenter le champ de contrainte du modèle pour arriver à un champ égal à celui du prototype. Cette exigence implique la première relation $\overset{*}{\sigma} = 1$.
On déduit alors $\overset{*}{g} = \overset{*}{l}^{-1}$. Ce qui signifie que l'augmentation de g dans la centrifugeuse doit être inversement proportionnelle à l'échelle du modèle.
Le facteur d'échelle sur le temps dynamique est alors $\overset{*}{t} = \overset{*}{l}$.

Relations issues des lois de comportement : cas de l'élasticité linéaire

Les lois de comportement des matériaux définissent les relations qui lient les contraintes aux déformations. Ces lois font ressortir un certain nombre de paramètres caractéristiques du matériau qui eux aussi doivent vérifier des lois de similitude. On donne ici le cas de l'élasticité linéaire. La relation liant les contraintes aux déformations en élasticité linéaire est données par :

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

ε est un paramètre adimensionnel donc $\overset{*}{\varepsilon} = 1$. Pour la même raison, $\overset{*}{\nu} = 1$. On en déduit que : $\overset{*}{E} = \overset{*}{\sigma}$. Dans le cas de la pesanteur terrestre ($\overset{*}{g} = 1$) on a $\overset{*}{E} = \overset{*}{\sigma} = \overset{*}{l}$ et dans le cas de la centrifugation ($\overset{*}{g} = \overset{*}{l}^{-1}$) on a $\overset{*}{E} = \overset{*}{\sigma} = 1$.

Symbole	Grandeur (G)	Dimension	$\overset{*}{G}_{ter.}$	$\overset{*}{G}_{centrif.}$
l	Longueur	L	$\overset{*}{l}$	$\overset{*}{l}$
ε	Déformation	1	1	1
g	Pesanteur	LT^{-2}	1	$\overset{*}{l}^{-1}$
t	Temps dynamique	T	$\overset{*}{l}^{-1/2}$	$\overset{*}{l}$
ρ	Masse volumique	ML^{-3}	1	1
σ	Contrainte	$ML^{-1}T^{-2}$	$\overset{*}{l}$	1
E	Module d'Young	$ML^{-1}T^{-2}$	$\overset{*}{l}$	1
ν	Coefficient de Poisson	1	1	1
F	Force	MLT^{-2}	$\overset{*}{l}^{3}$	$\overset{*}{l}^{2}$
S	Surface	L^2	$\overset{*}{l}^{2}$	$\overset{*}{l}^{2}$
V	Volume	L^3	$\overset{*}{l}^{3}$	$\overset{*}{l}^{3}$
m	Masse	M	$\overset{*}{l}^{3}$	$\overset{*}{l}^{3}$

Tableau 1 : Récapitulatif des conditions de similitude sous gravité terrestre et en centrifugeuse.

4 - Références bibliographiques

CORTE, J-F. et GARNIER, J. La modélisation en centrifugeuse : un outil d'étude des fondations pour l'ingénieur. *Bulletin de liaison du laboratoire des Ponts et Chaussées*, 1993, N° 183, p. 49-58.

MARTINOT-LAGARDE, A. Similitude physique. Exemples d'applications à la mécanique des fluides. *Mémorial des sciences physiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1960, fascicule 66 9, 70 p.

MANDEL, J. Essais sur modèles réduits en mécanique des terrains - Etude des conditions de similitude. *Revue de l'Industrie Minière*, 1962, septembre, N° 9, p. 611-620.

SAINT-GUILHEM, R. *Les principes généraux de la similitude physique*. Paris : Editions Eyrolles, 1971. 103 p.

SAINT-GUILHEM, R. Sur les fondements de la similitude physique : le théorème de Federman. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1985, Vol. 4, N° 3, p. 337-356.

SEDOV, L. *Similitude et dimensions en mécanique*. Moscou : Mir, 1977. 420 p.

WEBER, J.-D. *Les applications de la similitude physique aux problèmes de la mécanique des sols*. Paris : Eyrolles et Gauthier Villars, 1971. 62 p.

Exercices d'application

Ex 1 : On fait la maquette à l'échelle 1/10 d'une table en bois dont le plateau, de dimensions 1 m x 2 m, a 2 cm d'épaisseur. La table pèse 6 kg.

En supposant que l'on utilise le même bois pour la maquette et pour le prototype, donner les dimensions et le poids de la maquette.

Ex 2 : On suspend une sphère en plomb de 1kg à un fil de 0,5 mm^2 de section. Ce fil se casse si l'on y suspend une masse de 2 kg.

Calculer la contrainte dans une section du fil, ainsi que la contrainte à la rupture du fil.

1) On veut faire un modèle du système masse/fil, à une échelle 5 fois plus grande, en utilisant les mêmes matériaux.

2) Donner pour le modèle, la masse de la sphère, la section du fil ainsi que la contrainte dans le fil. Que peut-on en déduire ?

Ex 3 : Une sphère de rayon R, est suspendue à un parachute d'une surface de 1 m^2. On suppose qu'un vent ascendant (produit par une soufflerie) génère une pression de 100 Pa sur le parachute, et fait décoller la sphère.

1) En supposant que la sphère ait une masse volumique ρ de 10 kg/m^3, calculer le rayon de la sphère.

2) On fait un modèle réduit au 1/5 de ce système, en utilisant les mêmes matériaux. Calculer le rayon de la sphère ainsi que la pression exercée par le vent pour que la sphère décolle.

3) On fait toujours un modèle réduit au 1/5, mais cette fois-ci en supposant que la pression exercée par le vent reste égale à 100 Pa. Que doit valoir la masse volumique de la sphère, pour qu'elle décolle pour une pression de 100 Pa ?