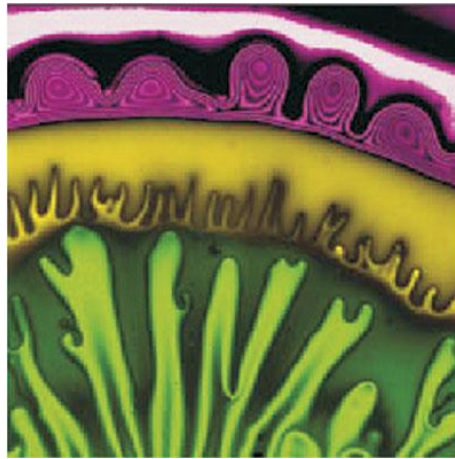


# Mécanique des milieux continus

Université de Liège



Notes du cours

**MECA0203**

Pierre C. DAUBY

Janvier 2007

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES





Allée tourbillonnaire de von Kármán dans le sillage  
créé par le vent autour de l'île mexicaine de  
Guadalupe (ouest de la basse Californie)  
Photo NASA

# Table des matières

Table des matières .....	2
Introduction .....	4
0 Notions de calcul tensoriel .....	7
0.1 Vecteur dans un espace euclidien.....	7
0.2 Changement de système de coordonnées cartésiennes et changement de base associée.....	7
0.3 Forme linéaire .....	8
0.4 Définition d'un tenseur .....	10
0.5 Algèbre tensorielle.....	11
0.6 Cas particulier des tenseurs d'ordre 2 .....	13
0.7 Tenseurs isotropes .....	17
0.8 Tenseur fonction du temps.....	17
0.9 Champ tensoriel.....	18
0.10 Opérateur-vecteur $\nabla$ .....	19
0.11 Coordonnées curvilignes .....	21
0.12 Coordonnées cylindriques .....	22
0.13 Coordonnées sphériques.....	24
1 Notion de milieu continu .....	25
1.1 L'hypothèse de milieu continu et la notion de particule matérielle .....	25
1.2 Solides, liquides et gaz.....	27
2 Cinématique des milieux continus .....	29
2.1 Mouvement d'un milieu continu.....	29
2.2 Description eulérienne et description lagrangienne .....	30
2.3 Dérivées temporelles .....	32
2.4 Trajectoires et lignes de courant.....	35
2.5 Les déformations d'un milieu continu.....	36
2.6 Le tenseur taux de déformation et le tenseur de vortacité (ou de spin) .....	44
2.7 Remarques .....	47
2.8 Application : changements homogènes de configuration.....	49
3 Lois de conservation .....	53
3.1 Lemme : dérivée temporelle d'intégrales volumiques eulériennes.....	54
3.2 Conservation de la masse .....	58
3.3 Conservation de la quantité de mouvement.....	60
Forces agissant sur un milieu continu .....	60
Forces surfaciques et tenseur des tensions .....	62
Équation de conservation de la quantité de mouvement .....	67
3.4 Conservation du moment cinétique .....	69
3.5 Conservation de l'énergie.....	72
3.6 Forme générale des équations d'évolution : les équations de bilan .....	76
3.7 Equation de bilan de l'entropie et second principe de la thermodynamique .....	79
3.8 Conditions aux limites .....	81
3.9 Résumé des équations.....	81
4 Equations d'état et équations constitutives .....	83

5	Le solide élastique linéaire, ou solide de Hooke .....	85
5.1	<i>Approche expérimentale</i> .....	85
5.2	<i>Elasticité linéaire : hypothèses générales</i> .....	86
5.3	<i>Equations de conservation de l'élasticité linéaire</i> .....	87
5.4	<i>La loi de Hooke</i> .....	88
5.5	<i>Résumé des équations</i> .....	93
5.6	<i>Élasto-statique</i> .....	93
5.7	<i>Équations de Navier</i> .....	95
5.8	<i>Interprétation des coefficients élastiques</i> .....	95
5.9	<i>Application : ondes (volumiques) dans les solides élastiques isotropes</i> .....	100
6	Introduction à la thermo-mécanique des fluides.....	106
6.1	<i>Définition des fluides – Pression et tensions visqueuses</i> .....	106
6.2	<i>Le fluide newtonien</i> .....	108
6.3	<i>Le fluide parfait</i> .....	112
6.4	<i>Loi de Fourier et conduction thermique</i> .....	113
6.5	<i>Brève introduction à la Thermodynamique Classique d'Onsager-Prigogine :</i> <i>Description thermodynamique du fluide de Newton-Fourier</i> .....	113
6.6	<i>Résumé des équations gouvernant l'évolution d'un fluide de Newton-Fourier isotrope</i> .....	119
6.7	<i>Applications : les fluides parfaits</i> .....	121
	L'équation de Bernoulli .....	121
	Le théorème de Kelvin.....	124
	Sources de vorticité dans un écoulement .....	125
	écoulements potentiels incompressibles.....	127
	écoulement potentiel 2D autour d'un cylindre circulaire de longueur infinie .....	128
	Ondes gravifiques et capillaires à la surface d'un fluide parfait.....	134
6.8	<i>Applications : Solutions exactes des équations de Navier-Stokes</i> .....	143
	1. �coulement de Couette plan .....	143
	2. �coulement de Poiseuille plan.....	145
	3. Effet Marangoni.....	146
6.9	<i>Application : la diffusion de la chaleur</i> .....	149
6.10	<i>Application : la diffusion de la quantité de mouvement dans un fluide visqueux</i> .....	153
6.11	<i>Le nombre de Reynolds</i> .....	154
6.12	<i>Annexe : la tension de surface</i> .....	159
7	Bibliographie.....	164

---

# Introduction

L'objet premier de la *Mécanique des milieux continus* est l'étude des déformations et des écoulements des solides, des liquides et des gaz sous l'effet de forces. D'autres phénomènes, tels que les transferts de chaleur ou les transferts diffusifs de matière, font cependant aussi partie du champ d'étude de cette discipline.

Il s'agit d'une théorie « classique », c'est-à-dire non relativiste et non quantique. En tant qu'étude des mouvements, la démarche peut être vue comme une prolongation de la mécanique des systèmes de points matériels et de la mécanique du solide.

Il s'agit également d'une théorie macroscopique qui s'intéresse à la description de la matière à des échelles spatiales assez grandes vis-à-vis des dimensions moléculaires<sup>1</sup>. A ce titre, la *Mécanique des milieux continus* constitue une extension des cours de base de thermodynamique (ou plus exactement de thermostatique) suivis en candidature et dont l'objet se limitait à la description des états d'équilibre et des transitions « réversibles » entre ceux-ci. L'étude de la thermodynamique du non-équilibre que nous entamons ici portera quant à elle sur les comportements en dehors de l'équilibre et sur les évolutions non réversibles de la matière.

D'un point de vue technique (*i.e.* mathématique), il est intéressant de signaler que la *Mécanique des milieux continus* est une « théorie des champs », et c'est même, du point de vue historique, la première de ces théories (XVIII<sup>ème</sup> siècle). En *Mécanique des milieux continus*, la matière est en effet assimilée à un « continuum » qui est décrit par un ensemble de variables d'état (température, vitesse, pression,...) qui sont des fonctions continues de la position dans l'espace ainsi que du temps. Les équations qui rendent compte de l'évolution spatio-temporelle de tels systèmes sont des équations aux dérivées partielles.

Les applications de la *Mécanique des milieux continus* sont extrêmement nombreuses et très diversifiées. A titre d'exemples, on peut citer les domaines de la science suivants, qui se basent sur les concepts et résultats que nous allons présenter dans ce cours :

- Géophysique (géodésie, étude de la croûte terrestre, étude des mouvements des plaques tectoniques, séismologie)
- Météorologie (océanographie, interactions air-mer, changements climatiques, réchauffement de la planète)
- Etude de l'environnement (pollution de l'air ou de l'eau, écoulement des eaux à la surface de la terre)
- Astrophysique (mouvements convectifs dans les étoiles, structure et stabilité des étoiles)
- Physique des matériaux (comportements des matériaux granulaires, mousses, gels, polymères)

---

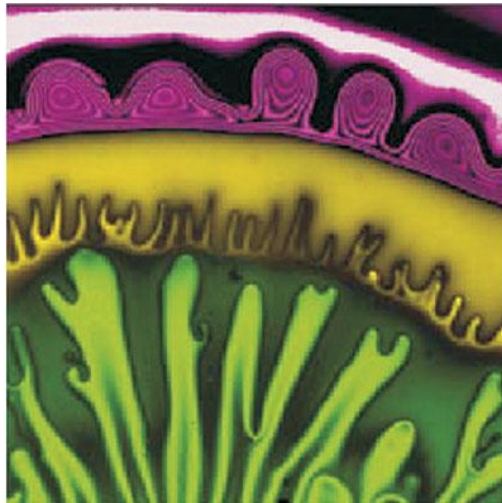
<sup>1</sup> Le pont avec les descriptions microscopiques peut être envisagé dans le cadre de la Physique statistique – théorie cinétique des gaz par exemple – mais ne sera pas (ou très peu) abordé dans ce cours.

- 
- Sciences appliquées
    - ✓ résistance des matériaux : dimensionnement de structures solides telles que ponts, bâtiments, voitures, navires, avions, navettes spatiales...
    - ✓ aérodynamique : vols d'avions, fusées ou navettes, traînée (frottement) des véhicules automobiles dans l'air,...
    - ✓ transport de fluide
  - Biologie, biophysique (écoulement des fluides biologiques (sang, air) dans le corps, biomécanique, conception de prothèses)

Il est également intéressant de mentionner que la *Mécanique des milieux continus* fournit le cadre théorique de base permettant l'analyse de nombreuses questions à caractère fondamental, portant notamment sur les phénomènes non linéaires et l'apparition d'auto-organisation dans les systèmes loin de l'équilibre (morphogénèse). La *Mécanique des milieux continus* est en effet régie par des équations aux dérivées partielles non linéaires. De telles équations permettent de décrire des phénomènes de bifurcations, ou de transitions, telles que celles observées dans de nombreux systèmes physiques et, en particulier, lors de l'apparition du chaos dans le comportement d'un système non linéaire. Ces équations constituent également des exemples d'équations de réaction-diffusion et permettent à ce titre d'analyser les comportements dits complexes, caractérisés entre autres par l'apparition spontanée d'une structuration, d'une organisation, des systèmes étudiés. L'auto-organisation d'un système physique, la création spontanée de « forme » en son sein, sont des phénomènes parmi les plus fascinants dont l'étude est aujourd'hui encore loin d'être terminée. De nombreuses images assez spectaculaires des structures élégantes qui peuvent apparaître dans des problèmes d'écoulement sont présentées chaque année à un concours<sup>2</sup> organisé lors de la réunion annuelle de la Société Américaine de Physique (division "Dynamique des fluides"). Les images gagnantes sont ensuite publiées dans la prestigieuse revue "Physics of Fluids" et peuvent être téléchargées sur le site web <http://ojps.aip.org/phf/gallery/>. À titre d'exemples, deux "chefs-d'œuvre" de ce "musée" sont présentés dans les figures ci-dessous. Une autre illustration d'un phénomène d'auto-organisation atmosphérique est fournie à la page 1.

---

<sup>2</sup> "Gallery of Fluid Motions", American Physical Society (division of Fluid Dynamics).



Etirement instable par effet Marangoni d'une solution de surfactant sur un film liquide mince.  
 ( [http://ojps.aip.org/phf/gallery/pdf/2003/S9\\_1.pdf](http://ojps.aip.org/phf/gallery/pdf/2003/S9_1.pdf) )

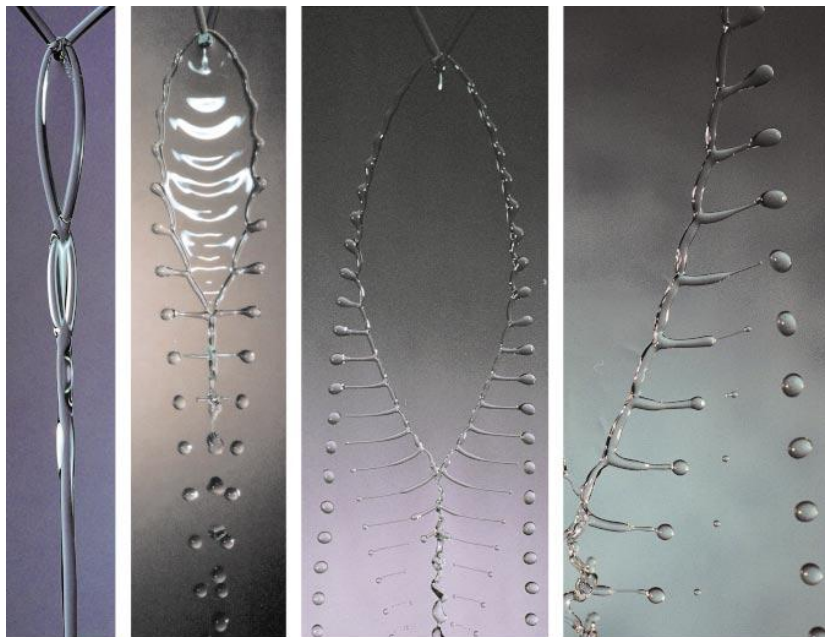


Figure 1

Figure 2

Figure 3

Figure 4

“Fluid fishbones” créés par la collision de deux jets (le débit des jets augmente progressivement)  
 ( [http://ojps.aip.org/phf/gallery/pdf/2002/S8\\_1.pdf](http://ojps.aip.org/phf/gallery/pdf/2002/S8_1.pdf) )

# 0 Notions de calcul tensoriel

## 0.1 Vecteur dans un espace euclidien

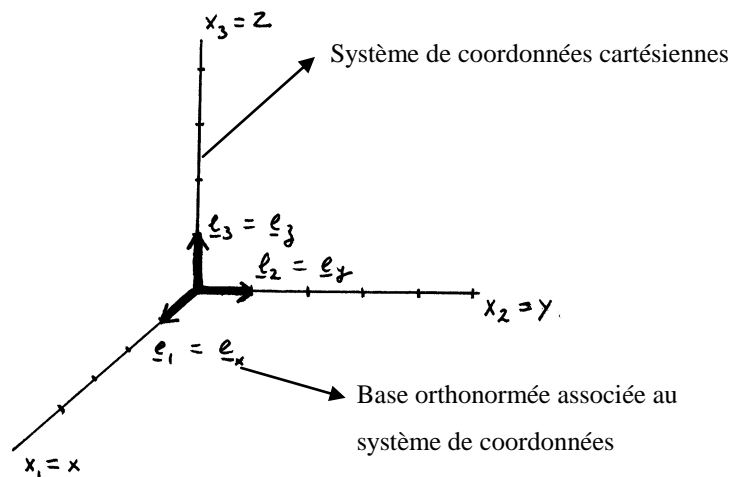


Fig. 0.1

Un point géométrique  $P$  est repéré par ses coordonnées  $x, y, z$  dans le système de coordonnées cartésiennes choisi.

Un vecteur  $\mathbf{v}$  peut être décomposé en une combinaison linéaire des vecteurs de base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . On écrit :

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i, \quad (0.1)$$

où les  $v_i$  sont les composantes de  $\mathbf{v}$  dans la base  $\mathbf{e}_i$ .

## 0.2 Changement de système de coordonnées cartésiennes et changement de base associée

Soient  $x_i$  et  $X_i$  les coordonnées de  $P$  dans les deux systèmes d'axes et  $v_i$  et  $V_i$  les composantes de  $\mathbf{v}$  dans les deux bases.

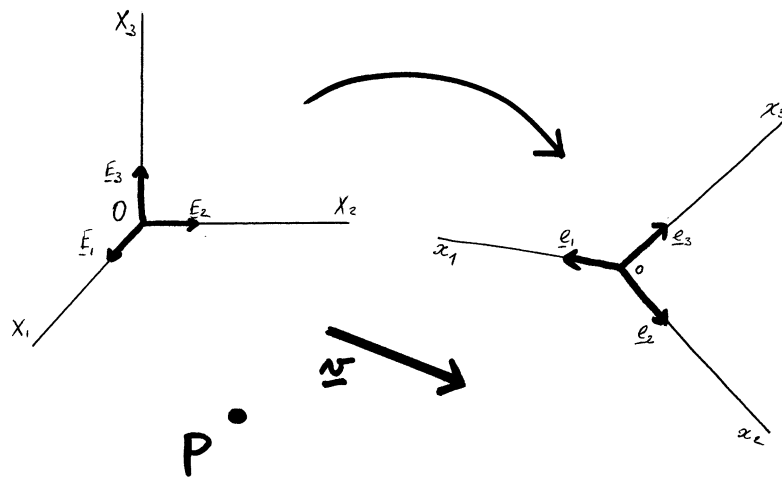


Fig. 0.2

On a alors :

$$x_i = M_{ij} X_j + b_i \quad (0.2)$$

$$v_i = M_{ij} V_j \quad (0.3)$$

où  $M_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_j$  ( $\mathbf{e}_i = M_{ij} \mathbf{E}_j$ ) et  $b_i$  sont les coordonnées de  $O$  dans le système  $x_i$ . La matrice  $M$  est orthogonale :  $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$ .

La relation (0.3) est ce que l'on appelle la **loi vectorielle**. Elle peut être considérée comme la définition d'un vecteur.

Un exemple classique de grandeur physique que l'on peut représenter par un vecteur est la vitesse d'un point matériel :

- dans tout système de coordonnées cartésiennes, la vitesse d'un point matériel est calculée en prenant la dérivée temporelle des coordonnées de ce point :

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{v} = V_i \mathbf{E}_i = \dot{X}_i(t) \mathbf{E}_i$$

- dans les deux systèmes de coordonnées, la dérivation temporelle permet de définir une « flèche » unique —indépendante du système de coordonnées— qui est le vecteur  $\mathbf{v}$ . On montre aisément que les composantes de cette « flèche » dans les deux bases associées aux deux systèmes de coordonnées sont reliées par la loi vectorielle.

### 0.3 Forme linéaire

Une **forme**  $a$  est une fonction réelle dont la variable est un vecteur :

$$a : \mathbf{u} \rightarrow a(\mathbf{u}) \in R .$$

Exemples de formes :

$$a(\mathbf{u}) = 0$$

$$a(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$$

$$a(\mathbf{u}) = 1$$

$$a(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^7$$

$$a(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \text{ où } \mathbf{a} \text{ est un vecteur fixé}$$

Il importe de remarquer qu'une expression telle que

$$a(\mathbf{u}) = u_1 \text{ où } u_1 \text{ désigne la 1}^{\text{ère}} \text{ composante de } \mathbf{u}$$

ne constitue par réellement une forme car la valeur de la fonction dépend non seulement du vecteur sur lequel on l'évalue mais aussi de la base utilisée pour effectuer le calcul.

Une forme  $a$  est linéaire si :

$$a(\alpha \mathbf{u}) = \alpha a(\mathbf{u}) \quad (0.4a)$$

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}) + a(\mathbf{v}) \quad (0.4b)$$

Lorsque l'espace des vecteurs  $\mathbf{u}$  est muni d'un produit scalaire, on peut démontrer l'importante propriété suivante :

<p>Toute forme linéaire s'écrit</p> $a(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u},$ <p>où <math>\mathbf{a}</math> est un vecteur constant.</p>	(0.5)
---	-------

En effet, soient deux systèmes de coordonnées et bases associées  $(x_i, \mathbf{e}_i)$  et  $(X_i, \mathbf{E}_i)$ . En décomposant  $\mathbf{u}$  dans les deux bases et en tenant compte de la linéarité, on a

$$a(\mathbf{u}) = u_i a(\mathbf{e}_i) = U_i a(\mathbf{E}_i).$$

Posons alors  $a_i = a(\mathbf{e}_i)$  et  $A_i = a(\mathbf{E}_i)$ . Il vient alors

$$a(\mathbf{u}) = u_i a_i = U_i A_i \quad (0.6)$$

Par la formule du changement de base, on a également

$$a_i = a(\mathbf{e}_i) = a(M_{ij} \mathbf{E}_j) = M_{ij} a(\mathbf{E}_j) = M_{ij} A_j.$$

c-à-d

$$a_i = M_{ij} A_j$$

Cette dernière relation n'est rien d'autre que la loi vectorielle, définissant un vecteur  $\mathbf{a}$  donné par :

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = A_i \mathbf{E}_i$$

Vu (0.6), la forme  $a$  s'écrit alors

$$a(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}.$$

Il est intéressant de remarquer en outre que le vecteur  $\mathbf{a}$  est unique. En effet, si on a  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$  pour tout vecteur  $\mathbf{u}$ , on a bien sûr  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . Par ailleurs, il est bien clair que tout vecteur  $\mathbf{a}$  définit une forme linéaire  $a(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ . On voit donc que, si l'on dispose d'un produit scalaire, les formes linéaires peuvent être mises en correspondance biunivoque avec les vecteurs. Il est alors assez commode et très courant d'identifier une forme avec le vecteur qui lui est équivalent.

## 0.4 Définition d'un tenseur

Un tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre  $N$  est une forme multilinéaire de  $N$  vecteurs (variables) :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N).$$

La propriété démontrée ci-dessus permet d'identifier les vecteurs et les tenseurs d'ordre 1 (si l'espace vectoriel est muni d'un produit scalaire). Lorsqu'un vecteur  $\mathbf{v}$  est considéré comme un tenseur et agit sur un vecteur  $\mathbf{u}$ , le résultat est donné par le produit scalaire de ces deux vecteurs :  $\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ . Tout scalaire peut aussi être considéré comme un tenseur d'ordre 0.

Le cas particulier d'un tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre 2, ou forme bilinéaire, sera important dans la suite. Dans ce cas, la propriété de linéarité se traduit de manière générale par la relation :

$$\mathbf{t}\left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{u}_k, \sum_{\ell=1}^q \beta_\ell \mathbf{v}_\ell\right) = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^q \alpha_k \beta_\ell \mathbf{t}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_\ell) \quad (0.7)$$

La notion de composantes d'un tenseur se définit comme suit. Pour un tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre 2, on peut écrire, en décomposant les vecteurs variables  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  en leurs composantes :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{t}(u_i \mathbf{e}_i, v_j \mathbf{e}_j) = t_{ij} u_i v_j \quad (0.8)$$

où les  $t_{ij} = \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  sont, par définition, les *composantes* de  $\mathbf{t}$  dans la base  $\mathbf{e}_i$ . Il est parfois utile de considérer les composantes d'un tenseur comme formant une matrice de nombres. Il importe cependant de ne pas confondre un tenseur et ses composantes dans une base donnée. Remarquons encore que les composantes d'un tenseur d'ordre un (d'une forme) ne sont rien d'autre que les composantes du vecteur équivalent à cette forme.

Les lois de transformation des composantes d'un tenseur lors d'un changement de base s'obtiennent aisément. Si  $t_{ij}$  et  $T_{ij}$  désignent les composantes de  $\mathbf{t}$  dans les bases  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{E}_i$  respectivement, il vient :

$$t_{ij} = \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{t}(M_{ik} \mathbf{E}_k, M_{j\ell} \mathbf{E}_\ell) = M_{ik} M_{j\ell} \mathbf{t}(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_\ell) = M_{ik} M_{j\ell} T_{k\ell}$$

La relation

$$t_{ij} = M_{ik} M_{j\ell} T_{k\ell} \quad (0.9)$$

constitue la loi tensorielle d'ordre 2. Elle se généralise aisément à un tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre  $N$  quelconque. Les composantes de  $\mathbf{t}$  sont définies par

$$t_{i_1 i_2 \dots i_N} = \mathbf{t}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_N}) \quad (0.10)$$

La loi tensorielle d'ordre  $N$  s'écrit alors

$$t_{i_1 \dots i_N} = M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \dots M_{i_N j_N} T_{j_1 j_2 \dots j_N} \quad (0.11)$$

La loi tensorielle d'ordre 1 est bien sûr la loi vectorielle.

Ajoutons enfin que l'on rencontre les notations suivantes pour désigner un tenseur  $\mathbf{t}$  qui serait, par exemple, d'ordre 2 :  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\dots) = \underline{\underline{\mathbf{t}}}$ .

## 0.5 Algèbre tensorielle

Diverses notions et opérations algébriques peuvent être définies de manière naturelle pour les tenseurs. Elles sont décrites très brièvement ci-dessous. Pour être complet, il conviendrait de montrer que les quantités introduites au moyen des diverses opérations sont bien des tenseurs. On peut le faire par exemple en prouvant que les composantes de ces quantités se transforment bien en suivant les lois tensorielles d'ordre approprié lors d'un changement de base.

### TENSEUR NUL

---

Considérons par exemple un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 2. Par définition, ce tenseur est nul si  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Un tenseur est donc nul si et seulement si ses composantes sont nulles dans **une** base (et donc dans toutes les bases<sup>1</sup>) :  $a_{ij} = 0$ .

### EGALITE ENTRE DEUX TENSEURS DE MEME ORDRE

---

Deux tenseurs d'ordre 3 (par exemple)  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont égaux si  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , c'est-à-dire si  $a_{ijk} = b_{ijk}$  dans une base (et donc dans toutes les bases<sup>2</sup>).

### MULTIPLICATION D'UN TENSEUR PAR UN SCALAIRE

---

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ avec } b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

### ADDITION DE DEUX TENSEURS DE MEME ORDRE

---

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ avec } c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk}$$

<sup>1</sup> Vu la loi tensorielle, l'annulation dans une base engendre l'annulation dans toute base.

<sup>2</sup> C'est à nouveau la loi tensorielle qui permet de le démontrer.

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{p=1}^n \alpha_p \mathbf{a}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ avec } b_{ijk} = \sum_{p=1}^n \alpha_p (\mathbf{a}_p)_{ijk}$$

**MULTIPLICATION TENSORIELLE**

---

Soient par exemple un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 1 et un tenseur  $\mathbf{b}$  d'ordre 2. Le produit  $\mathbf{ab}$  de ces 2 tenseurs, parfois aussi noté  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ , est défini comme le tenseur  $\mathbf{c}$  d'ordre 3 suivant :

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{a}(\mathbf{u})\mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

On a alors dans toute base cartésienne

$$c_{ijk} = a_i b_{jk}.$$

Remarquons que le produit tensoriel n'est pas commutatif en général :

$$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}.$$

On appelle « dyade » le produit tensoriel de 2 vecteurs. Si, par exemple,  $\mathbf{t} = \mathbf{a} \mathbf{b}$ , on a  $\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{u})\mathbf{b}(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ . Une « polyade » est une expression du genre  $\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}$ , où  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont des vecteurs.

Tout tenseur peut être décomposé en une combinaison linéaire de polyades de vecteurs de base dont les coefficients sont les composantes de ce tenseur. Si, par exemple,  $\mathbf{t}$  est un tenseur d'ordre 2, on peut écrire

$$\mathbf{t} = t_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

En effet

$$\begin{aligned} (t_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= t_{ij} [(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \\ &= t_{ij} [\mathbf{e}_i(\mathbf{u})\mathbf{e}_j(\mathbf{v})] \\ &= t_{ij} u_i v_j \\ &= \mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

**PRODUIT SCALAIRE DE TENSEURS**

---

Soient par exemple un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 2 et un tenseur  $\mathbf{b}$  d'ordre 3. On définit  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  comme un tenseur dont l'ordre est égal à (l'ordre de  $\mathbf{a}$  + l'ordre de  $\mathbf{b}$  - 2) = 3 et dont les composantes sont  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_{ijk} = a_{ip} b_{pjk}$ . De la même façon, on peut définir

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_i = a_{pq} b_{qpi}$$

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} \rightarrow (\mathbf{a} : \mathbf{b})_i = a_{pq} b_{pqi}$$

On peut également définir ces produits scalaires directement, sans recourir aux composantes. On a, par exemple :

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_k) \mathbf{b}(\mathbf{e}_k, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

avec  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  des vecteurs quelconques et  $\mathbf{e}_k$  les trois vecteurs d'une base quelconque.

Il est facile de montrer que les quantités ainsi définies sont bien des tenseurs.

Il est aussi intéressant de noter que si  $\sigma$  est un tenseur d'ordre deux, alors les composantes du vecteur  $\mathbf{e}_i \cdot \sigma$  sont données par la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice des composantes du tenseur  $\sigma$ , alors que les composantes du vecteur  $\sigma \cdot \mathbf{e}_i$  sont données par la  $i^{\text{ème}}$  colonne de cette même matrice.

---

#### CONTRACTION

Soit  $\mathbf{a}$  un tenseur d'ordre 3 par exemple. On peut à partir de ce tenseur définir un tenseur d'ordre  $3 - 2 = 1$  (un vecteur) en *contractant* le tenseur  $\mathbf{a}$  sur deux de ses indices.

Par exemple, il est facile de vérifier que  $b_i = a_{jij}$  sont bien les composantes d'un vecteur. On peut aussi définir d'autres vecteurs par contraction d'une paire quelconque d'indices de  $\mathbf{a}$  :  $c_i = a_{ijj}$  ou  $d_i = a_{jji}$ .

## 0.6 Cas particulier des tenseurs d'ordre 2

Les tenseurs d'ordre 2 méritent une attention particulière car ils apparaissent dans de nombreux chapitres de la physique. Pour ces tenseurs, il est intéressant de récrire la loi tensorielle sous la forme suivante :

$$t_{ij} = M_{ik} T_{kl} M^T_{lj},$$

ou encore :

$$t_{ij} = M_{ik} T_{kl} M^{-1}_{lj} \quad (0.12)$$

puisque la matrice du changement de base est orthogonale.

---

#### EVALUATION D'UN TENSEUR D'ORDRE 2

Pour tout tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre deux et quels que soient les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , on a :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \quad (0.13)$$

---

#### TRANSPOSE D'UN TENSEUR D'ORDRE 2

Le transposé  $\mathbf{t}^T$  d'un tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre 2 est défini par  $\mathbf{t}^T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{t}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ . On a alors  $(\mathbf{t}^T)_{ij} = t_{ji}$  dans toute base.

---

#### INVARIANTS D'UN TENSEUR D'ORDRE 2

On appelle invariant d'un tenseur d'ordre 2 un scalaire qui est calculé à partir des composantes du tenseur et qui est invariant lors d'un changement de base.

## TRACE

La trace du tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre 2 est le scalaire défini par

$$\text{tr}(\mathbf{t}) = t_{ii}. \quad (0.14a)$$

Le caractère invariant résulte du fait que la trace est définie par une opération de contraction.

## DETERMINANT

Le déterminant du tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre 2 est le scalaire défini par

$$\text{dtm}(\mathbf{t}) = \text{dtm}(t_{ij}). \quad (0.14b)$$

Le caractère invariant résulte immédiatement de la loi tensorielle (0.12).

## TENSEUR SYMETRIQUE ET TENSEUR ANTISYMETRIQUE

---

Un tenseur  $\mathbf{s}$  d'ordre 2 est symétrique si  $\mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{s}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . On a donc aussi  $\mathbf{s}^T = \mathbf{s}$  et les composantes d'un tel tenseur vérifient alors la relation  $s_{ij} = s_{ji}$  dans toute base cartésienne. On en déduit qu'un tenseur d'ordre 2 symétrique ne possède que **six** composantes effectives.

Un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 2 est antisymétrique si  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Il vient donc  $\mathbf{a}^T = -\mathbf{a}$  et les composantes d'un tel tenseur satisfont à  $a_{ij} = -a_{ji}$  dans toute base cartésienne. Un tenseur d'ordre 2 antisymétrique ne possède donc que **trois** composantes effectives.

Vu la propriété d'antisymétrie, il est intéressant d'écrire les composantes d'un tenseur antisymétrique sous la forme :

$$a_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k \quad (0.15)$$

où  $\varepsilon_{ijk}$  représente le symbole de Levi-Civita et où  $a_k$  désignent 3 nombres bien définis dans toute base cartésienne. Nous allons à présent montrer que ces  $a_k$  constituent en fait les composantes d'un pseudo-vecteur (ou vecteur axial)  $\mathbf{a}$ .

La relation (0.15) peut tout d'abord être inversée en multipliant les 2 membres par  $\varepsilon_{ijl}$  et en effectuant la somme<sup>3</sup> sur les indices  $i$  et  $j$ . Il vient

$$a_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} a_{ij} \quad (0.16)$$

Dans une autre base  $\mathbf{E}_i$ , la relation précédente s'écrit  $A_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{ij}$ . En utilisant la loi tensorielle d'ordre 2 pour le tenseur  $\mathbf{a}$ , on déduit :

$$A_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{ir}^T M_{js}^T a_{rs} \quad (0.17)$$

---

<sup>3</sup> On a  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$  ( $\delta_{kl}$  est le symbole de Kronecker).

On a donc

$$M_{tk} A_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{ir}^T M_{js}^T M_{kt}^T a_{rs} \quad (0.18)$$

Puisque  $\varepsilon_{ijk} M_{ir}^T M_{js}^T M_{kt}^T = \varepsilon_{rst} \text{dtm}(M^T)$ , on a donc

$$M_{tk} A_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{rst} \text{dtm}(M) a_{rs} = \text{dtm}(M) a_t \quad (0.19)$$

Cette relation n'est rien d'autre que la loi tensorielle d'ordre 1, au facteur  $\text{dtm}(M) = \pm 1$  près. Cela signifie que les quantités  $a_k$  sont les composantes d'un vecteur axial  $\mathbf{a} = a_k \mathbf{e}_k = \pm A_k \mathbf{E}_k$ .

Il existe donc une correspondance biunivoque définie par (0.15-16) entre les tenseurs antisymétriques et les vecteurs axiaux. Un vecteur axial et le tenseur antisymétrique qui lui est associé sont dits équivalents (rappelons (cf. (0.5)) qu'un vecteur (polaire) est équivalent à un tenseur d'ordre 1 !).

Ajoutons encore que si  $\mathbf{A}$  est un tenseur antisymétrique d'ordre 2 et si  $\mathbf{a}$  est le vecteur axial qui lui est équivalent par (0.15-16), alors, pour tout vecteur  $\mathbf{b}$ , on a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (0.20)$$

Notons enfin que le vecteur (axial)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  est le vecteur associé au tenseur antisymétrique  $\mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ .

#### DECOMPOSITIONS D'UN TENSEUR D'ORDRE 2

---

Un tenseur  $\mathbf{t}$  d'ordre 2 peut être décomposé en sa trace et sa « partie déviatorique »  $\hat{\mathbf{t}}$  (ou son « déviateur ») qui est de trace nulle :

$$t_{ij} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{t}) \delta_{ij} + \hat{t}_{ij} \quad (0.21)$$

avec  $\text{tr}(\hat{\mathbf{t}}) = 0$ .

Il peut aussi se décomposer en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2}(\mathbf{t} + \mathbf{t}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{t} - \mathbf{t}^T). \quad (0.22)$$

#### TENSEURS D'ORDRE 2 ET APPLICATIONS LINEAIRES ENTRE VECTEURS

---

Puisque la contraction (produit scalaire) d'un vecteur et d'un tenseur d'ordre deux est un vecteur, tout tenseur d'ordre deux  $\mathbf{t}$  permet de définir une application  $\tilde{\mathbf{t}}$  des vecteurs sur les vecteurs :

$$\tilde{\mathbf{t}} : \mathbf{u}(\text{vecteur}) \rightarrow \mathbf{w}(\text{vecteur}) : \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \quad (0.23)$$

Cette application est évidemment linéaire et l'évaluation du tenseur  $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{u})$  d'ordre 1 sur un vecteur  $\mathbf{v}$  est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (0.24)$$

Réciproquement, toute application linéaire  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  définie sur les vecteurs permet de construire le tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre deux défini par

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \quad (0.25)$$

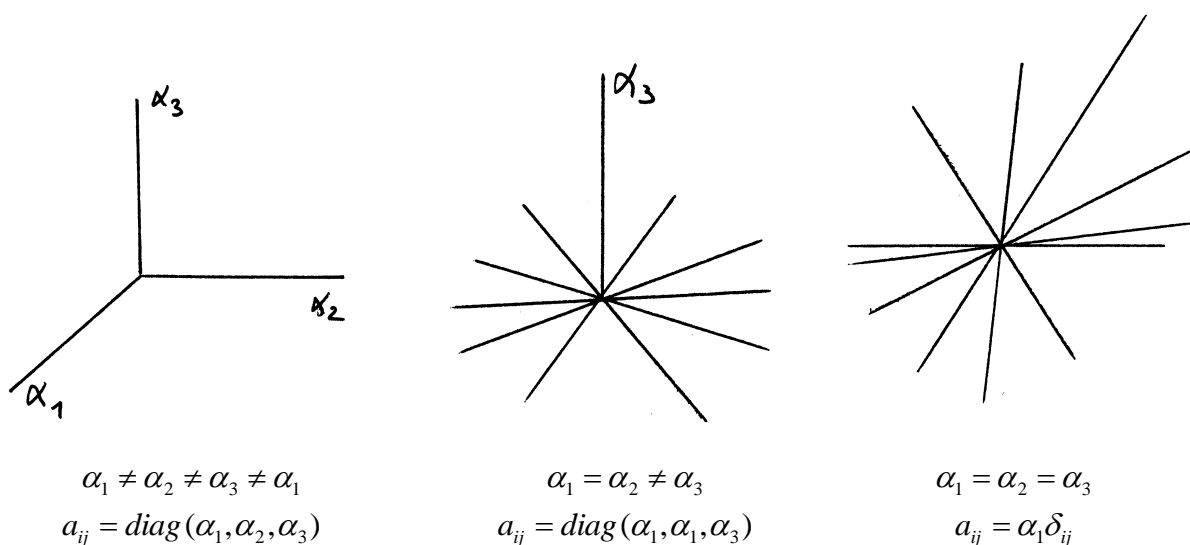
On vérifie alors aisément que le tenseur  $\mathbf{t}^*$  que l'on peut associer par (0.25) à l'application  $\tilde{\mathbf{t}}$  n'est rien d'autre que le tenseur  $\mathbf{t}$  de départ, car

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Cela implique qu'il existe une correspondance biunivoque entre les tenseurs d'ordre deux et les applications linéaires et qu'il est donc possible d'identifier ces deux notions et de ne plus distinguer  $\mathbf{t}$  et  $\tilde{\mathbf{t}}$ .

#### DIAGONALISATION D'UN TENSEUR SYMETRIQUE D'ORDRE 2

Diagonaliser un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 2 symétrique consiste à rechercher un système d'axes dans lesquels la matrice des composantes de ce tenseur est diagonale. Vu la forme (0.12) de la loi tensorielle, ce problème est donc tout à fait équivalent au problème algébrique de diagonalisation de la matrice des composantes.



Ainsi, on dit que  $u_i$  est un vecteur propre du tenseur  $a_{ij}$ , de valeur propre  $\alpha$ , si  $a_{ij}u_j = \alpha u_i$ . Si  $a_{ij}$  est symétrique, l'algèbre nous apprend que :

- $a_{ij}$  admet trois valeurs propres réelles
- les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

On peut donc toujours trouver un système d'axes cartésiens tels que les trois axes soient des directions propres du tenseur symétrique  $a_{ij}$ . Dans ces axes, le tenseur possède une matrice de composantes qui est diagonale.

## 0.7 Tenseurs isotropes

Un tenseur isotrope est un tenseur qui a les mêmes composantes dans toutes les bases<sup>4</sup>. Le tenseur métrique du second ordre  $\mathbf{g}$  permettant de construire le produit scalaire de 2 vecteurs et défini par

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (0.26)$$

constitue un exemple de tenseur isotrope puisque ses composantes dans toutes les bases cartésiennes sont les symboles de Kronecker :

$$g_{ij} = \delta_{ij}. \quad (0.27)$$

Considérons à présent la forme linéaire  $\mathbf{h}$  d'ordre 3 définie par

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \quad (0.28)$$

Remarquons tout d'abord qu'étant donné la définition du produit vectoriel de deux vecteurs, la quantité  $\mathbf{h}$  définie ci-dessus n'est pas totalement intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la base dans laquelle elle est évaluée, puisque son signe est fonction de l'orientation de cette base. Pour cette raison, nous dirons que  $\mathbf{h}$  est un « pseudo-tenseur » qui porte le nom de pseudo-tenseur de Levi-Civita.

Dans une base cartésienne quelconque, les composantes de  $\mathbf{h}$  sont données par

$$h_{ijk} = \mathbf{h}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{ijk}$$

où  $\varepsilon_{ijk}$  sont les symboles de Levi-Civita. On voit donc que  $\mathbf{h}$  est bien isotrope<sup>5</sup>. Notons encore que le caractère pseudo-tensoriel peut aussi être mis en évidence en écrivant explicitement la loi de transformation des composantes de  $\mathbf{h}$  dans un changement de base. On a en effet

$$M_{ir} M_{js} M_{kt} \varepsilon_{rst} = \text{dtm}(M) \varepsilon_{ijk} \quad (0.29)$$

où  $M$  désigne la matrice du changement de base dont le déterminant est égal à  $\pm 1$ .

## 0.8 Tenseur fonction du temps

Un tenseur quelconque peut dépendre du temps  $t$ . Pour un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 2 par exemple, on écrit  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$  et, même lorsque  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont constants au cours du temps<sup>6</sup>, le résultat de l'évaluation du tenseur sur ces vecteurs dépend de  $t$ .

On peut aussi introduire la dérivée temporelle d'un tenseur  $\mathbf{a}$  :

<sup>4</sup> De manière plus physique, on peut dire qu'un tenseur isotrope est un tenseur qui ne dépend que de l'orientation **relative** des vecteurs qui sont ses variables. En considérant l'effet d'un tel tenseur sur les vecteurs de base, on déduit alors que les composantes d'un tenseur isotrope sont les mêmes dans toutes les bases cartésiennes.

<sup>5</sup> C'est géométriquement évident puisque  $\mathbf{h}$  représente le volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs dont il dépend.

<sup>6</sup> Puisque la notion de vecteur constant (ou, de manière plus générale, de vecteur qui dépend du temps) est fonction de l'observateur, la notion de tenseur fonction du temps dépend, elle aussi, de l'observateur !

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t + dt) - \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)}{dt} \quad (0.30)$$

où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont des vecteurs indépendants du temps<sup>7</sup>.

Dans une base (considérée comme étant indépendante de  $t$ ), les composantes du tenseur dérivé sont les dérivées des composantes :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{dt}(\dots, t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{a_{ij}(t + dt)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - a_{ij}(t)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{a_{ij}(t + dt) - a_{ij}(t)}{dt} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \\ &= \frac{da_{ij}}{dt} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Donc

$$\left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{ij} = \frac{da_{ij}}{dt} \quad (0.31)$$

## 0.9 Champ tensoriel

Un champ tensoriel est un tenseur défini en chaque point géométrique  $P$ . Si  $\mathbf{x}$  désigne les coordonnées de ce point dans un système de coordonnées cartésiennes, on a

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, P) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) \quad (0.32)$$

En supposant que  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont indépendants de  $\mathbf{x}$ , on peut définir les dérivées spatiales partielles de ce tenseur de manière standard :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_k) - \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})}{\delta} \\ &= \dots \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (0.33)$$

Evaluons ensuite cette expression pour  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_s$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k} a_{rs} \quad (0.34)$$

On peut ensuite montrer que les quantités  $\frac{\partial}{\partial x_k} a_{rs}$  constituent les composantes d'un tenseur d'ordre 3. En effet,

---

<sup>7</sup> La notion de dérivée temporelle d'un tenseur dépend évidemment de l'observateur !

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a_{rs} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial X_i} (M_{rj} M_{se} A_{je}) = M_{ki} M_{rj} M_{se} \frac{\partial}{\partial X_i} A_{je} \quad (0.35)$$

car  $x_i = M_{ij} X_j + b_i$  et  $X_i = M_{ji} (x_j - b_j)$ .

Ce tenseur de composantes  $\frac{\partial}{\partial x_i} a_{jk}$  est le tenseur gradient de  $\mathbf{a}$  et est noté  $\nabla \mathbf{a}$  :

$$(\nabla \mathbf{a})_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_i} a_{jk} \quad (0.36)$$

Cette notation<sup>8</sup> est justifiée par l'introduction, dans le paragraphe qui suit, de l'opérateur gradient noté  $\nabla$ .

## 0.10 Opérateur-vecteur $\nabla$ (prononcer « NABLA »)

Soit un système de coordonnées cartésiennes  $x_i$  et la base  $\mathbf{e}_i$  qui lui est associée. Définissons l'opérateur gradient

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (0.37)$$

Il s'agit d'un opérateur différentiel vectoriel dont les « composantes » sont  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ . Le caractère vectoriel découle du raisonnement suivant :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial X_k} = M_{ik} \frac{\partial}{\partial X_k} . \quad (0.38)$$

On voit donc que les quantités  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  suivent bien la loi tensorielle d'ordre 1 :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = M_{ik} \frac{\partial}{\partial X_k} . \quad (0.39)$$

Le gradient d'un tenseur  $\mathbf{a}$  peut alors être défini comme le produit tensoriel de l'opérateur  $\nabla$  avec le tenseur  $\mathbf{a}$ , en tenant compte du fait que les « composantes » de  $\nabla$  sont des opérateurs agissant sur les quantités qui les suivent. On a donc, puisque les  $\mathbf{e}_i$  sont indépendants des  $x_i$  :

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q) = \mathbf{e}_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} a_{pq} \right) \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} a_{pq} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q . \quad (0.40)$$

On déduit donc que les composantes du tenseur gradient s'écrivent :

---

<sup>8</sup> Attention au fait que dans certains ouvrages de calcul tensoriel on a plutôt  $(\nabla \mathbf{a})_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}$ .

$$(\nabla \mathbf{a})_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_i} a_{jk}. \quad (0.41)$$

On peut ensuite introduire la divergence d'un tenseur comme étant le produit scalaire de  $\nabla$  avec ce tenseur :

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \quad (0.42)$$

Si  $\mathbf{a}$  est un tenseur d'ordre  $N (\geq 1)$ , sa divergence est d'ordre  $N-1$ . Les composantes s'obtiennent aisément. Par exemple, si  $\mathbf{a}$  est d'ordre 2, on a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} a_{pq} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} a_{iq} \mathbf{e}_q \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} a_{iq} \mathbf{e}_q \end{aligned} \quad (0.43)$$

$\nabla \cdot \mathbf{a}$  est donc un vecteur de composantes

$$(\nabla \mathbf{a})_i = \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ki} \quad (0.44)$$

Le rotationnel  $\nabla \times \mathbf{a}$  s'introduit de manière similaire<sup>9</sup>. Si  $\mathbf{a}$  est un tenseur d'ordre  $N \geq 1$ ,  $\nabla \times \mathbf{a}$  est un pseudo-tenseur qui est également d'ordre  $N$ . Ses composantes sont ( $\mathbf{a}$  est par exemple un tenseur d'ordre 2)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times (a_{lm} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} a_{lm} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} a_{lm} \varepsilon_{ilp} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_m \end{aligned} \quad (0.45)$$

On a donc

$$(\nabla \times \mathbf{a})_{ij} = \varepsilon_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_\ell} a_{mj} \quad (0.46)$$

Si  $\mathbf{a}$  est un vecteur,

$$(\nabla \times \mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k \quad (0.47)$$

---

<sup>9</sup> Le produit vectoriel de deux tenseurs d'ordre quelconque s'introduit aisément en décomposant ces tenseurs en polyades de vecteurs de base. Pour deux tenseurs  $\mathbf{A}$  d'ordre 2 et  $\mathbf{B}$  d'ordre 3, on a par exemple :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times B_{lmn} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = A_{ij} B_{lmn} \varepsilon_{jlp} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_p \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n.$$

Le laplacien d'un tenseur  $\mathbf{a}$  se construit en effectuant le produit scalaire de  $\nabla$  avec lui-même :

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{a} \quad (0.48)$$

On peut alors montrer la propriété suivante (ordre de  $\mathbf{a} \geq 1$ ) :

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (0.49)$$

En coordonnées cartésiennes, on a en outre

$$(\Delta \mathbf{a})_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} a_{ij} = \Delta(a_{ij}) \quad (0.50)$$

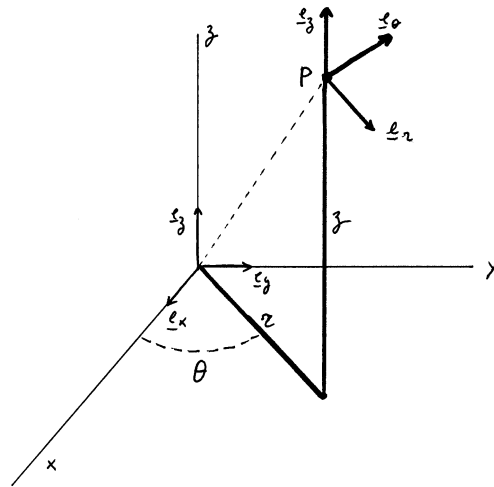
## 0.11 Coordonnées curvilignes

Dans un espace euclidien, il est toujours possible de définir des coordonnées cartésiennes. Cependant, certains problèmes pratiques peuvent s'avérer plus simples à étudier en utilisant des coordonnées curvilignes et certaines bases de vecteurs qu'on leur associe.

Nous allons considérer ici principalement les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques, mais on pourrait généraliser. Une caractéristique importante de ces coordonnées cylindriques et sphériques est qu'elles sont « orthogonales ». Cela signifie que les trois lignes de coordonnées qui passent par tout point  $P$  se coupent à angle droit. En chaque point de l'espace, on peut alors introduire un trièdre orthonormé de vecteurs tangents aux lignes de coordonnées. C'est ce trièdre qui constitue habituellement la base associée aux coordonnées utilisées.

Une différence fondamentale entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et les coordonnées curvilignes est que **la base de vecteurs associée aux coordonnées curvilignes varie en général d'un point à l'autre**. Nous allons voir que cela influe de manière importante sur les calculs faisant intervenir les opérateurs de dérivation ( $\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times$ ) et même, de manière plus générale, sur la forme de ces opérateurs. Nous allons montrer comment « transporter » ces opérateurs définis de manière invariante pour les coordonnées cartésiennes (la relation (0.37) définit l'opérateur gradient dans **tous** les systèmes de coordonnées cartésiennes) dans des systèmes de coordonnées quelconques. Ajoutons que l'on pourrait aussi définir ces opérateurs de manière invariante dans des systèmes de coordonnées quelconques mais nous ne le ferons pas ici.

## 0.12 Coordonnées cylindriques



- Relation  $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

- Base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  associée aux coordonnées cylindriques : base orthonormée dont les vecteurs sont tangents aux lignes de coordonnées.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases}$$

- L'expression du gradient dans les coordonnées cylindriques s'obtient en effectuant un changement de variable dans l'opérateur de dérivation et en remplaçant les  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  par leurs expressions en fonction de  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_z$ .

On a tout d'abord,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \arctg y/x}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(y/x)}{\partial x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{r^2} = \frac{-\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

De même,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \dots = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (C_\theta \mathbf{e}_r - S_\theta \mathbf{e}_\theta) \left( C_\theta \partial_r - S_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta \right) + (S_\theta \mathbf{e}_r + C_\theta \mathbf{e}_\theta) \left( S_\theta \partial_r + C_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta \right) + \mathbf{e}_z \partial_z \\ &= C_\theta^2 \mathbf{e}_r \partial_r - C_\theta S_\theta \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \partial_\theta - S_\theta C_\theta \mathbf{e}_\theta \partial_r + S_\theta^2 \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta \\ &\quad + S_\theta^2 \mathbf{e}_r \partial_r + C_\theta S_\theta \mathbf{e}_\theta \partial_r + C_\theta S_\theta \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \partial_\theta + C_\theta^2 \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta^2 + \mathbf{e}_z \partial_z \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- Les gradient, divergence,... d'un tenseur s'obtiennent ensuite en effectuant les produits tensoriel, scalaire,... de  $\nabla$  avec ce tenseur. Les composantes sont obtenues en décomposant les tenseurs en polyades des vecteurs de la base associée aux coordonnées cylindriques avant d'appliquer l'opérateur  $\nabla$ . Lorsqu'on applique  $\nabla$ , **il importe de noter que les  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  dépendent de  $r, \theta, z$  et doivent donc être dérivés.** Les dérivées des vecteurs de base s'obtiennent facilement en considérant leur expression en fonction des vecteurs de la base cartésienne. Par exemple, on a

$$\mathbf{e}_r = C_\theta \mathbf{e}_x + S_\theta \mathbf{e}_y$$

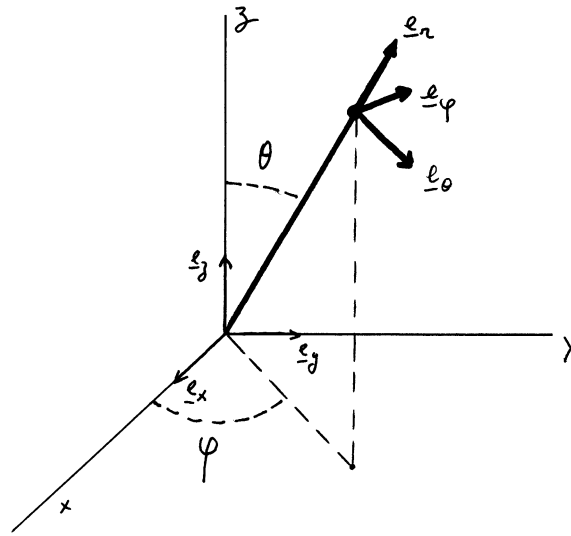
$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = -S_\theta \mathbf{e}_x + C_\theta \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\theta$$

Pour les coordonnées cylindriques, les deux seules dérivées non nulles sont

$$\partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \qquad \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$$

Ajoutons encore que lorsque l'on applique  $\nabla$  à un tenseur, il faut effectuer toutes les dérivées avant d'effectuer les produits (tensoriel, scalaire,...).

## 0.13 Coordonnées sphériques



Le changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x = r S_\theta C_\varphi \\ y = r S_\theta S_\varphi \\ z = r C_\theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ \theta = \arctg \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z} \\ \varphi = \arctg y / x \end{cases}$$

Les relations entre les vecteurs de base s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = S_\theta C_\varphi \mathbf{e}_x + S_\theta S_\varphi \mathbf{e}_y + C_\theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = C_\theta C_\varphi \mathbf{e}_x + C_\theta S_\varphi \mathbf{e}_y - S_\theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -S_\varphi \mathbf{e}_x + C_\varphi \mathbf{e}_y \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_x = S_\theta C_\varphi \mathbf{e}_r + C_\theta C_\varphi \mathbf{e}_\theta - S_\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_y = S_\theta S_\varphi \mathbf{e}_r + C_\theta S_\varphi \mathbf{e}_\theta + C_\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z = C_\theta \mathbf{e}_r - S_\theta \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

Les dérivées des vecteurs  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  sont données par :

$$\begin{cases} \partial_r \mathbf{e}_r = 0 & \partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta & \partial_\varphi \mathbf{e}_r = S_\theta \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r \mathbf{e}_\theta = 0 & \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r & \partial_\varphi \mathbf{e}_\theta = C_\theta \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r \mathbf{e}_\varphi = 0 & \partial_\theta \mathbf{e}_\varphi = 0 & \partial_\varphi \mathbf{e}_\varphi = -C_\theta \mathbf{e}_\theta - S_\theta \mathbf{e}_r \end{cases}$$

On en déduit l'expression de l'opérateur gradient :

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

# 1 Notion de milieu continu

## 1.1 *L'hypothèse de milieu continu et la notion de particule matérielle*

Dans un gaz, les molécules sont séparées les unes des autres par des espaces vides dont les dimensions sont de loin supérieures aux dimensions des molécules elles-mêmes. Dans un liquide ou dans un solide, même si les molécules constitutives du matériau sont plus proches les unes des autres, il est clair que la matière est concentrée dans les noyaux et est donc loin d'être répartie uniformément dans tout l'espace «occupé» par la molécule. Il en est évidemment de même pour la plupart des propriétés de la matière (masse, composition, vitesse, densité, ...) qui sont fortement non uniformes, fortement discontinues, lorsque l'on envisage les phénomènes à une échelle moléculaire.

En mécanique des milieux continus, on ne s'intéresse pas de manière directe aux molécules constitutives des systèmes que l'on étudie et l'on envisage plutôt leur comportement à une échelle macroscopique, beaucoup plus grande que les distances typiques qui séparent deux molécules. L'hypothèse de base de la mécanique des milieux continus –l'**hypothèse de continuité**– consiste alors à supposer que le comportement macroscopique de la matière est **le même que si** celle-ci était **parfaitement continue**. Des quantités physiques telles que la masse ou la quantité de mouvement associées à une portion de matière sont supposées réparties continûment sur le volume occupé par la matière, et non pas concentrées dans une infime partie de ce volume, comme c'est le cas en réalité. Cette hypothèse de continuité paraît assez naturelle dans de nombreux problèmes de la vie courante où nous sommes plus souvent confrontés aux propriétés macroscopiques de la matière qu'à ses propriétés moléculaires. Il est par exemple facile d'admettre que des mesures telles que la vitesse du vent ou la température de l'eau sont bien des fonctions continues définies sur la matière que l'on étudie.

Pour justifier plus en détail cette hypothèse de continuité, il est intéressant de remarquer que toute propriété macroscopique que l'on associe à un milieu continu est en fait une moyenne de la grandeur microscopique correspondante sur un volume dont la taille est grande devant l'échelle de longueur des variations microscopiques mais néanmoins petite par rapport à l'échelle de longueur des variations macroscopiques provenant de l'hétérogénéité du milieu étudié. Dans la Fig. 1.1, on a représenté les variations d'une propriété quelconque  $P$  en fonction de la taille du volume sur lequel la moyenne est effectuée. Dans la zone hachurée, la valeur de la propriété varie très peu. Pour cette raison, les volumes correspondant portent le nom de « volumes élémentaires représentatifs ». Si les instruments de mesure macroscopique dont on dispose ont des domaines de sensibilité dont les dimensions sont de l'ordre des dimensions de ces volumes élémentaires représentatifs, aussi couramment appelés « particules matérielles », il est possible de définir les variables d'état localement en tout point  $X$  au moyen de ces instruments. Ainsi, par exemple, si l'on envisage un échantillon de laboratoire dont les

dimensions sont de l'ordre du centimètre, on peut souvent se contenter d'appareils de mesure permettant de détecter des variations sur des distances de l'ordre de  $10^{-3}$  cm. De tels appareils sont caractérisés par des volumes de sensibilité de l'ordre de  $10^{-9}$  cm<sup>3</sup>. Sous des conditions normales, un tel volume d'air contient environ  $3 \times 10^{10}$  molécules. On conçoit donc qu'étant donné la grandeur de ce nombre, la moyenne calculée sur toutes les molécules d'une telle particule matérielle est bien indépendante des fluctuations microscopiques dues à la structure moléculaire de la matière.

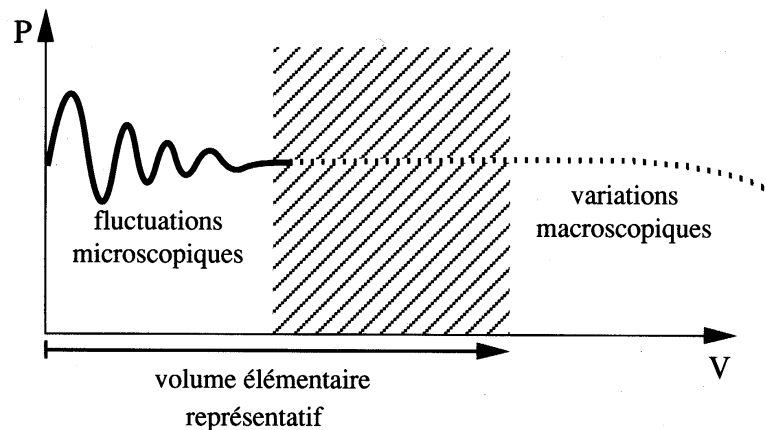


Fig. 1.1

Ajoutons encore que c'est l'hypothèse de continuité qui va permettre d'utiliser le calcul intégral-différentiel (dans l'espace et dans le temps) pour décrire les milieux continus et d'ainsi développer une analyse prenant la forme d'une théorie des champs<sup>1</sup>. Dans ce contexte, il est alors commode d'assimiler une particule matérielle se trouvant en un point de coordonnées  $X$ , et souvent désignée simplement au moyen de ces coordonnées, à la matière contenue dans un volume infinitésimal  $dV$  entourant ce point.

### Remarques

A un instant donné, la particule matérielle  $X$  est définie par les molécules qui se trouvent à proximité du point  $X$  et qui permettent de définir clairement les mesures macroscopiques moyennes dont on vient de parler. Il importe cependant de souligner que ce ne sont pas nécessairement toujours les mêmes molécules qui définissent une particule matérielle évoluant dans le temps. Pour un solide, l'assimilation d'une particule matérielle avec un ensemble fixe de molécules peut être raisonnable mais elle est plus délicate dans le cas des gaz (ou des liquides) dont les molécules se déplacent et peuvent passer d'une particule matérielle à l'autre<sup>2</sup>.

Dans certaines situations extrêmes, la mécanique des milieux continus ne peut être utilisée pour décrire l'évolution de la matière car la notion de volume élémentaire représentatif ou de particule matérielle perd son sens. Par exemple, les satellites en mouvement dans la très haute

<sup>1</sup> D'un point de vue historique, il est intéressant de signaler que la mécanique des milieux continus constitue en fait la première « théorie des champs ».

<sup>2</sup> On peut s'en convaincre en imaginant par exemple un gaz en équilibre. Dans ce gaz, les molécules se déplacent continuellement, même si le milieu est macroscopiquement au repos.

atmosphère sont plongés dans un gaz à très faible densité qui ne peut probablement pas être assimilé à un milieu continu. Un problème semblable apparaît également lorsque de très fortes variations de la densité avec la position apparaissent, comme par exemple dans les ondes de choc<sup>3</sup>.

Il est parfois possible de jeter un pont entre l'approche macroscopique des milieux continus et des descriptions microscopiques prenant en compte la nature moléculaire de la matière. La théorie cinétique des gaz permet, par exemple, de définir, à partir des quantités microscopiques, des variables macroscopiques telles que la vitesse, la pression ou la température et de montrer que les équations d'évolution de ces variables sont semblables à celles obtenues par la démarche macroscopique. Il faut cependant souligner que l'accord entre les 2 démarches n'est pas toujours parfait. En particulier, certains coefficients macroscopiques tel que la viscosité ou la diffusivité thermique peuvent être calculés à partir des caractéristiques microscopiques mais l'accord quantitatif avec les mesures expérimentales n'est pas toujours très bon.

## 1.2 Solides, liquides et gaz

Il est courant de considérer qu'un milieu continu fait partie d'une des trois classes que sont les solides, les liquides ou les gaz. Souvent également, on regroupe sous l'appellation de «fluides» les liquides et les gaz qui, à la différence des solides, ont la propriété de ne pas posséder de forme privilégiée.

Il importe cependant de souligner que les frontières entre les différentes classes de matériaux ne sont pas toujours très nettes en mécanique des milieux continus. Ainsi, certains matériaux peuvent se comporter comme des fluides ou comme des solides suivant les conditions extérieures dans lesquelles ils se trouvent. En particulier, l'amplitude des contraintes appliquées à un matériau ainsi que le temps caractéristique des variations de ces contraintes jouent un rôle fondamental dans la manière dont ce matériau se comporte. Il est par exemple facile de vérifier que l'on s'enfonce beaucoup moins dans du sable mouillé si l'on court que si l'on reste sans mouvement. Les polymères fournissent un autre exemple de matériau dont le comportement dépend de la situation expérimentale dans laquelle il se trouve. On peut en effet assimiler un polymère à des enchevêtrements (des « pelotes ») de monomères et lui associer un temps caractéristique  $\tau$  de « débobinage » de ces pelotes en les monomères constitutifs. Si le temps caractéristique des variations imposées à ce polymère est inférieur au temps  $\tau$ , le polymère se comporte plus ou moins comme un solide. Au contraire, à basse fréquence (temps caractéristique d'excitation plus long que  $\tau$ ), le polymère « a le temps » d'utiliser des degrés de liberté internes pour « démêler » les monomères constitutifs et se déformer irréversiblement comme un liquide.

---

<sup>3</sup> Ces ondes de choc peuvent alors être modélisées en introduisant des « discontinuités » dans le système.

Dans la suite, nous étudierons quelques modèles simples de matériaux idéalisés solides et fluides qui permettent de rendre compte des comportements des matériaux réels dans de nombreuses situations expérimentales.

## 2 Cinématique des milieux continus

La cinématique des milieux continus s'attache à décrire les mouvements des milieux continus sans tenir compte des causes qui leur donnent naissance. Nous allons introduire dans ce chapitre des notions telles que les descriptions eulérienne et lagrangienne des mouvements d'un milieu continu, la notion de dérivée temporelle particulière, la notion de déformation d'un milieu continu, le tenseur 'taux de déformation', etc. ...

### 2.1 *Mouvement d'un milieu continu*

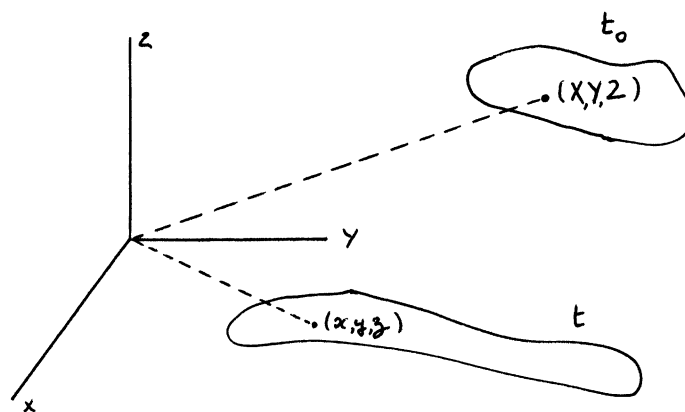


Fig. 2.1

Pour décrire complètement le mouvement d'un milieu continu, dans un système de référence donné (un système de coordonnées cartésiennes) il suffit de donner la position des différentes particules matérielles à chaque instant. Une façon simple de distinguer les différentes particules matérielles qui composent une portion de matière est de les repérer au moyen de leur position  $X$  à un instant  $t_0$  de référence arbitraire. Nous conviendrons donc d'utiliser les lettres capitales telles que  $X$  pour désigner les particules matérielles, ou encore leur position à un instant initial  $t_0$ .

Vu ces conventions, le mouvement d'un milieu continu est décrit entièrement par la donnée des positions  $x$  à un instant  $t$  quelconque de toutes les particules matérielles  $X$ , c'est-à-dire par la donnée des relations :

$$x = x(X, t) \quad (2.1.1)$$

Quelques remarques peuvent être faites à propos de ces relations. Notons tout d'abord que dans cette équation, le symbole ' $x$ ' est utilisé 2 fois, avec des significations différentes. A gauche du signe d'égalité, le symbole ' $x$ ' désigne la position de la particule matérielle  $X$  à l'instant  $t$ , alors qu'à droite ' $x$ ' désigne une fonction permettant de calculer cette

position en fonction de  $X$  et  $t$ . En fait, comme on le fait souvent en physique, on confond la fonction et sa valeur, ce qui peut parfois engendrer des confusions ou des malentendus. En fait, si l'on voulait être plus rigoureux dans les notations, on écrirait p. ex.

$$x = \xi(X, t) \quad (2.1.2)$$

Vu les conventions prises pour distinguer les particules matérielles, on a

$$x(X, t_0) = X. \quad (2.1.3)$$

Nous supposons en outre que les relations (2.1.1) sont biunivoques à chaque instant car on admet que toutes les particules qui existaient en  $t_0$  continuent d'exister dans la suite et se trouvent donc quelque part à tout instant  $t$ . Nous admettons donc que ces relations sont inversibles et que l'on peut déterminer la particule matérielle  $X$  qui se trouve à l'instant  $t$  en un point  $x$  quelconque. On suppose donc l'existence de la fonction  $X$  (ou  $\Xi$  si l'on veut être rigoureux dans les notations) telle que :

$$X = X(x, t) \quad \text{ou} \quad X = \Xi(x, t) \quad (2.1.4)$$

La fonction  $X$  (ou  $\Xi$ ) est la fonction inverse de la fonction  $x$  (ou  $\xi$ ) et on a donc:

$$\begin{aligned} X &= \xi^{-1}(x, t) = x^{-1}(x, t) \\ x &= \Xi^{-1}(X, t) = X^{-1}(X, t) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

où l'exposant '-1' représente la fonction inverse. On a donc aussi, identiquement,

$$\begin{aligned} x &= x(X(x, t), t) = \xi(\Xi(x, t), t) \\ X &= X(x(X, t), t) = \Xi(\xi(X, t), t) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Ajoutons encore que l'inversibilité des relations (2.1.1) se traduit aussi par le fait que la matrice jacobienne  $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$  est non singulière et que son déterminant est partout et toujours différent de zéro (théorèmes de la fonction inverse et des fonctions implicites).

## 2.2 Description eulérienne et description lagrangienne

Pour décrire le comportement d'un milieu continu, il importe de connaître l'évolution des différentes grandeurs qui caractérisent ce milieu continu. On s'intéressera, par exemple, à la vitesse, à la température, aux concentrations des différents composants du milieu, etc. ....

On peut remarquer que ces évolutions peuvent être envisagées de 2 points de vue bien distincts. La manière *a priori* la plus naturelle de considérer le problème est de suivre les variations temporelles des différentes grandeurs pour une particule matérielle  $X$  fixée. Si  $F$  désigne une de ces grandeurs, on s'intéresse donc à la fonction :

$$F = F(X, t) \quad (2.2.1)$$

Cette fonction décrit l'évolution au cours du temps de la grandeur  $F$  (la température p. ex.) pour la particule matérielle  $X$ . Notons encore une fois que l'on identifie dans cette écriture la fonction et sa valeur. On devrait plutôt écrire quelque chose du genre  $F = F_L(X, t)$  si l'on voulait être plus rigoureux dans les notations.

Cette description de l'évolution d'un milieu continu porte le nom **de description lagrangienne** ou **description matérielle** : les variables indépendantes *lagrangiennes* dont dépendent les grandeurs physiques sont, d'une part, le temps  $t$  et, d'autre part, les particules matérielles  $\mathbf{X}$ . Dans cette approche, la mécanique des milieux continus est d'une certaine façon une juxtaposition des descriptions des évolutions des différentes particules matérielles qui constituent la matière. Nous verrons que la description lagrangienne des milieux continus est utilisée assez fréquemment en théorie de l'élasticité car dans ce cas, la configuration du matériau élastique non chargé constitue une configuration de référence privilégiée et bien définie permettant de distinguer clairement les particules matérielles constitutives du milieu continu étudié en repérant leur position dans cette configuration.

Bien que cette description lagrangienne paraisse 'naturelle' puisqu'elle s'attache à décrire l'évolution de particules matérielles, que l'on peut assimiler de manière un peu vague à des portions de matière, elle n'en est pas moins assez peu commode lorsqu'on étudie l'évolution d'un fluide. Une première raison en est qu'il n'est pas facile, voire impossible, de distinguer clairement les particules matérielles constitutives d'un fluide, car contrairement au solide, un fluide ne possède pas de forme ou de configuration de référence. Par ailleurs, un exemple simple permet de comprendre que même si elle était possible, une description lagrangienne ne serait pas très utile dans la pratique. Considérons la météorologie qui a pour objet la prédiction du temps. Si un nuage de pluie survole Liège aujourd'hui, il m'importe peu de savoir où ce nuage se trouvera demain. Ce qui m'intéresse, c'est de savoir si je reverrai le soleil demain ou si une autre perturbation suivra celle d'aujourd'hui. Autrement dit, une description lagrangienne de l'évolution du nuage qui me survole aujourd'hui n'est pas directement intéressante. Les variables indépendantes d'une météo 'utile' doivent plutôt être la position  $\mathbf{x}$  dans un système de coordonnées donné (Liège) et le temps  $t$  (demain), plutôt que les particules matérielles  $\mathbf{X}$  (le nuage) et le temps  $t$  (demain). La **description eulérienne** des milieux continus étudie les évolutions sous la forme de fonction de  $\mathbf{x}$  et  $t$ . Dans ce contexte, l'évolution de la variable  $F$  s'écrira :

$$F = F(\mathbf{x}, t). \quad (2.2.2)$$

Cette fonction, que l'on devrait écrire  $F = F_E(\mathbf{x}, t)$ , dépend des variables *eulériennes*  $\mathbf{x}$  et  $t$  et elle donne l'évolution au cours du temps de la quantité physique  $F$  en un point fixe de l'espace. Une telle description constitue donc une théorie des champs puisque des grandeurs physiques sont associées, à chaque instant, à tous les points de l'espace géométrique.

Il est évidemment intéressant de faire le lien entre ces 2 descriptions des milieux continus. Remarquons tout d'abord que lorsque le temps s'écoule, les valeurs de la fonction  $F_E(x, t)$  se rapportent à des particules matérielles différentes. De manière plus précise, on peut dire que la description eulérienne de la variable  $F$  fournit la valeur de la quantité physique  $F$  se rapportant à la particule matérielle  $X$  qui se trouve au point géométrique  $x$  à l'instant  $t$ . En utilisant les relations (2.1.1-6), on peut donc toujours écrire :

$$F_E(x, t) = F_L(X(x, t), t), \quad (2.2.3a)$$

ou aussi

$$F_L(X, t) = F_E(x(X, t), t). \quad (2.2.3b)$$

Par abus d'écriture, on écrit aussi simplement

$$F(x, t) = F(X, t). \quad (2.2.4)$$

## 2.3 Dérivées temporelles

Beaucoup de lois d'évolution de la physique expriment l'égalité du taux de variation temporelle d'une grandeur associée à une quantité de matière avec une 'cause', une 'force'. Nous verrons dans la suite que la plupart des lois de la physique des milieux continus ne sont en fait rien d'autre que les lois de la physique 'particulaire' (du point matériel) exprimées pour les particules matérielles. Il importe donc de décrire clairement les notions de taux de variation temporelle d'une grandeur physique, que ce soit dans le cadre d'une description eulérienne ou dans le cadre d'une description lagrangienne d'un milieu continu.

Considérons tout d'abord la description lagrangienne d'un milieu continu, dont on a vu qu'elle était sans doute la plus 'naturelle'. Dans ce contexte, le taux de variation d'une grandeur physique pour une particule matérielle donnée se définit très simplement par la dérivée partielle par rapport à  $t$  de la fonction  $F_L(X, t)$  :

$$\text{taux de var. temp. de } F \text{ pour la part. mat. } X = \frac{\partial F(X, t)}{\partial t} \quad (2.3.1)$$

Les notions de vitesse et d'accélération lagrangiennes d'une particule matérielle se définissent alors par

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (2.3.3)$$

Pour être rigoureux, on devrait bien sûr écrire

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \xi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{a}_L(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_L(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.3.5)$$

Dans le contexte d'une description eulérienne des milieux continus, deux types de dérivées temporelles peuvent être introduits.

On peut tout d'abord considérer la dérivée partielle habituelle par rapport à  $t$  de fonctions eulériennes  $F$  dépendant de  $\mathbf{x}$  et  $t$ . La dérivée partielle par rapport à  $t$  de  $F(\mathbf{x}, t)$  exprime le taux local de variation temporelle d'une grandeur physique :

$$\text{taux local de variation temporelle de } F = \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.3.6)$$

Si l'on se souvient de la définition des dérivées en termes de limites

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x}, t + dt) - F(\mathbf{x}, t)}{dt}, \quad (2.3.7)$$

on remarque que la fonction  $F$  sous le signe de limite est toujours évaluée au même point géométrique  $\mathbf{x}$ , mais il faut noter que la particule matérielle qui se trouve en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  n'est pas la même que la particule matérielle qui se trouve en ce même endroit en l'instant  $t+dt$ . La dérivée partielle ne mesure donc pas le taux de variation temporelle de la grandeur  $F$  pour une particule matérielle fixée ; elle rend plutôt compte du taux de variation de la quantité  $F$  tel que le mesurerait un observateur fixe en le point  $\mathbf{x}$ . Cette dérivée est donc impropre à entrer telle quelle dans l'expression de principes physiques.

Dans le cadre d'une description eulérienne, c'est la dérivée « matérielle<sup>4</sup> » qui permet de rendre compte du taux de variation temporelle d'une grandeur physique pour la particule matérielle qui se trouve en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ .

Pour définir aisément la dérivée matérielle, il faut tout d'abord introduire le champ de vitesse eulérienne. La vitesse eulérienne au point géométrique  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  est définie comme étant égale à la vitesse de la particule  $\mathbf{X}$  qui se trouve en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ . On aura donc :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{v}_L(\mathbf{X}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)} \quad (2.3.8)$$

On peut alors définir la dérivée matérielle de la quantité  $F$  exprimée en variables eulériennes par :

$$\frac{dF(\mathbf{x}, t)}{dt} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{v}dt, t + dt) - F(\mathbf{x}, t)}{dt}$$

Dans le second terme du numérateur du membre de droite, la valeur de la fonction  $F$  se rapporte à la particule matérielle qui, à l'instant  $t$  se trouve au point spatial  $\mathbf{x}$ . Dans le premier, la fonction  $F$  est calculée pour la même particule matérielle qui, à l'instant  $t+dt$  et par définition de la vitesse, se trouve en le point géométrique  $\mathbf{x}+\mathbf{v}dt$ . Cette dérivée mesure donc un taux de variation tel qu'il est ressenti par la particule elle-même, ou encore tel que le mesurerait un observateur qui suit la particule. En développant le premier terme en série de Taylor au voisinage de l'instant  $t$ , il vient :

$$\frac{dF(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F \quad (2.3.9)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient. Ce résultat montre que la dérivée matérielle<sup>5</sup> d'une fonction dont les variables indépendantes sont les variables eulériennes  $\mathbf{x}$  et  $t$  est constituée de 2 termes. L'existence de ces deux termes provient du fait que lorsqu'on veut calculer dans un contexte eulérien, c'est-à-dire en manipulant des fonctions qui dépendent de  $\mathbf{x}$  et  $t$ , une dérivée temporelle telle que la mesurerait un observateur qui suit une particule matérielle donnée, il faut tenir compte de deux « effets » bien distincts. Le premier terme de l'expression

<sup>4</sup> Ou dérivée temporelle « particulière », ou encore dérivée « suivant le mouvement ». L'origine de cette notion de dérivée matérielle remonte aux travaux d'Euler (1770) et de Lagrange (1783).

<sup>5</sup> Dans une description lagrangienne, la dérivée partielle par rapport à  $t$  peut être considérée comme une dérivée 'matérielle' ou 'en suivant le mouvement'.

(2.3.9) rend compte des variations de  $F$  ressenties par la particule matérielle et dues au fait qu'à l'endroit  $\mathbf{x}$  où se trouve cette particule, la propriété  $F$  peut être en train d'évoluer dans le temps. Le second terme décrit quant à lui les variations de  $F$  ressenties par la particule et dues au mouvement de cette particule qui se déplace vers des endroits où la propriété en question prend éventuellement d'autres valeurs. Un exemple simple permet d'illustrer cette interprétation. Considérons un fluide qui s'écoule dans un tuyau, plongé lui-même dans un environnement dont la température est constante dans le temps et dans l'espace. Imaginons ensuite que le système, dans son ensemble, est porté progressivement à une température globale différente par un processus de chauffage quelconque. Dans ces conditions, toute particule matérielle verra sa température augmenter à cause des modifications globales imposées au champ de température par le processus de chauffage. C'est le premier terme de (2.3.9) qui rend compte de cet effet. Imaginons à présent que l'environnement dans lequel est plongé le tuyau est tel que la partie amont du tuyau est maintenue à une température supérieure à celle de la partie aval, les 2 températures étant invariables dans le temps. Dans ces conditions, toute particule matérielle se déplaçant dans le tuyau voit sa température varier au cours du temps parce qu'elle se dirige vers des zones où la température est plus basse. Dans ce contexte, c'est le deuxième terme de (2.3.9) qui rend compte des variations de la température mesurée le long de la trajectoire des particules matérielles. Ce second terme est souvent appelé « terme convectif » ou « terme d'advection » car son origine se trouve dans le mouvement du fluide. Signalons aussi que c'est ce terme qui rendra non linéaires les équations d'évolution de la mécanique des milieux continus comme nous le verrons plus tard.

Notons encore que le résultat (2.3.9) peut également s'obtenir en définissant  $dF(\mathbf{x},t)/dt$  par :

$$\frac{dF_e(\mathbf{x},t)}{dt} \stackrel{\text{déf}}{=} \left[ \frac{\partial F_L(X,t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \quad (2.3.10)$$

où la fonction  $F_L$  est donnée par

$$F_L(X,t) = F_e(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)$$

L'expression de  $dF(\mathbf{x},t)/dt$  peut en effet se calculer comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dF_e(\mathbf{x},t)}{dt} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left[ \frac{\partial F_L(X,t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \\ &= \left[ \frac{\partial F_e(x(X,t),t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \\ &= \left[ \left[ \frac{\partial F_e(y,t)}{\partial y_i} \right]_{y=x(X,t)} \frac{\partial x_i(X,t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} + \frac{\partial F_e(x,t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F_e(x,t)}{\partial t} + \mathbf{v}_{e,i}(x,t) \cdot \frac{\partial F_e(x,t)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial F_e(x,t)}{\partial t} + \mathbf{v}_e(x,t) \cdot \nabla F_e(x,t) \end{aligned}$$

Il est ensuite aisé de vérifier que la dérivée matérielle vérifie bien les propriétés habituelles des dérivées, telle que, par exemple, la règle de dérivation des produits de Leibniz. En revanche, il faut souligner que l'opération de dérivation matérielle ne commute pas avec les opérations de dérivations spatiales !

L'accélération eulérienne au point géométrique  $\mathbf{x}$  et à l'instant  $t$ , c-à-d l'accélération de la particule matérielle qui se trouve en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ , est donnée par

$$\mathbf{a}_e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} \quad (2.3.11)$$

ou encore,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} . \quad (2.3.12)$$

Si l'on définit un régime d'écoulement permanent (ou stationnaire) comme un régime pour lequel les différentes grandeurs sont indépendantes du temps lorsqu'elles sont exprimées en variables eulériennes, on voit que même dans un tel régime (caractérisé par une vitesse constante dans le temps), l'accélération peut être non nulle si l'écoulement est non uniforme.

Vu (2.3.10) on a aussi :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_L(X, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)} \quad (2.3.13)$$

Remarquons enfin que, de manière un peu formelle, on a aussi

$$\mathbf{v}_e(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.3.14)$$

où le symbole  $\mathbf{x}$  du membre de droite est considéré comme la variable spatiale eulérienne.

## 2.4 Trajectoires et lignes de courant

La **trajectoire** d'une particule matérielle  $X$  est la courbe formée par les points géométriques visités par la particule au cours du temps. L'équation de cette trajectoire est l'équation (2.1.1) :

$$x = x(X, t)$$

Si le champ de vitesse eulérien est connu, les trajectoires s'obtiennent en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.4.1)$$

Une **ligne de courant** est une courbe qui, à un instant donné, est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse eulérienne du milieu continu. A un instant  $t$  quelconque, une ligne de courant est donc donnée par une équation paramétrique de la forme  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ , où la fonction  $\mathbf{x}(s)$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}(s), t) \quad (2.4.1)$$

Cette équation traduit le fait que la tangente à la courbe  $\mathbf{x}(s)$  est bien le vecteur vitesse (Fig. 2.2).

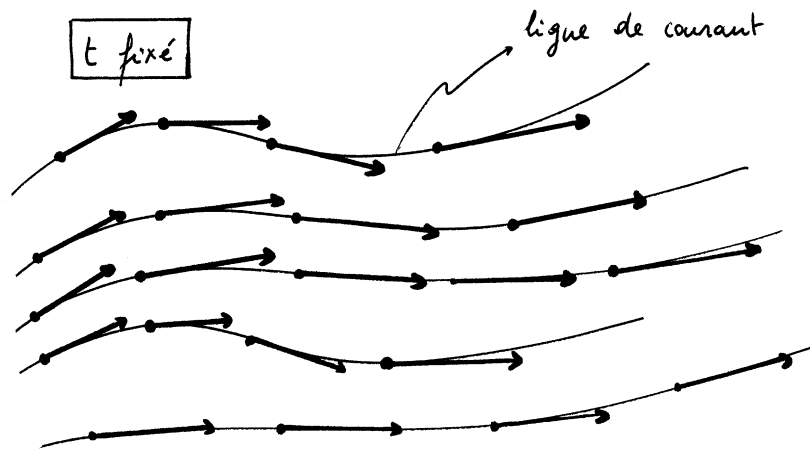


Fig. 2.2

Il importe de bien remarquer la différence entre une trajectoire et une ligne de courant. De manière imagée, on peut dire que les lignes de courant peuvent être représentées sur une photographie de l'écoulement à un instant donné alors que les trajectoires sont mises en évidence par un film du mouvement<sup>6</sup>. Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire, défini par le fait que le champ de vitesse eulérienne est indépendant du temps, les lignes de courant et les trajectoires sont bien sûr confondues.

## 2.5 Les déformations d'un milieu continu

Considérons un corps solide soumis à un ensemble de forces. Ces forces peuvent évidemment engendrer un déplacement en translation et/ou en rotation du solide mais ces forces peuvent également donner naissance à des déformations du corps solide. Ces déformations ne se font pas sans une certaine résistance de la part du corps et l'on peut comprendre que la réponse du solide, sa résistance à la déformation, sera déterminée par les déformations elles-mêmes. Les

<sup>6</sup> Les lignes de courant à la surface d'un fluide peuvent être visualisées de manière approximative en déposant des petites particules réfléchissantes à la surface de l'écoulement et en faisant une photographie avec un temps d'exposition très court. Les particules réfléchissantes produisent alors sur cette photo de petits traits qui sont approximativement tangents aux lignes de courant. Pour visualiser une trajectoire à la surface d'un fluide, il faut filmer l'évolution d'une particule réfléchissante particulière. On peut également réaliser une photographie avec un long temps d'exposition mais il importe alors de ne répandre que très peu de particules réfléchissantes à la surface du fluide, car les trajectoires peuvent éventuellement se croiser dans des écoulements non stationnaires

forces internes qui apparaissent dans un solide<sup>7</sup> soumis à des forces dépendent de la déformation engendrée par ces forces, un peu comme la force de rappel d'un ressort dépend de l'allongement qu'on lui impose au moyen de forces appliquées à ses extrémités. L'étude des déformations des milieux continus que nous allons aborder maintenant consiste à caractériser au niveau local les « allongements » engendrés au sein des solides par des forces qu'on applique en leur surface.

Il est clair que la notion de déformation est une notion relative qui ne peut être définie que par rapport à une configuration de référence du corps étudié. Dans la suite, nous distinguerons la « configuration de référence  $R_0$  » du milieu continu, ou configuration non déformée, de la « configuration déformée  $R$  », cette configuration déformée pouvant aussi éventuellement avoir été déplacée par une translation et/ou une rotation. Les particules matérielles seront étiquetées par leurs coordonnées  $X$  dans la configuration non déformée.

Le déplacement  $\mathbf{u}$  d'une particule matérielle  $\mathbf{X}$  entre les 2 configurations est donné par

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (2.5.1)$$

où  $\mathbf{x}$  désigne la position dans la configuration déformée  $R$ . Suivant que l'on envisage une description lagrangienne ou eulérienne, ce vecteur déplacement peut être considéré comme une fonction de  $\mathbf{X}$  ou de  $\mathbf{x}$ .

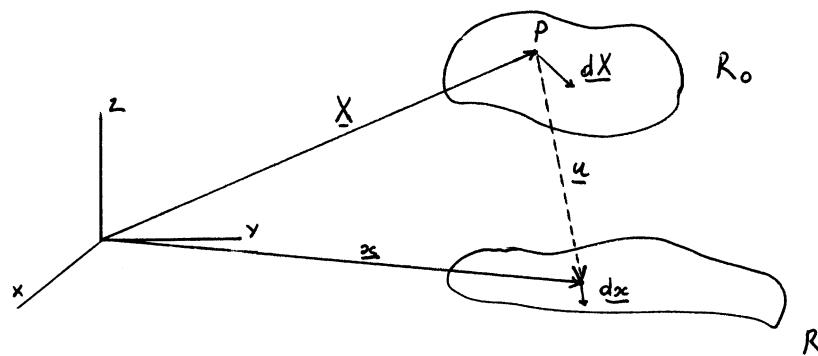


Fig. 2.3

Il faut remarquer que les *déformations* ne peuvent pas être caractérisées directement par les champs des déplacements. En effet, outre les déformations, les champs de déplacements contiennent également les translations et rotations du milieu continu. Pour décrire les déformations en termes des déplacements, il convient de séparer dans les champs de déplacement les contributions qui rendent compte de déplacements rigides de la matière des contributions engendrant réellement des déformations du corps étudié. Nous allons à présent définir les déformations d'un milieu continu en examinant l'évolution au cours du temps de la distance entre 2 particules matérielles voisines.

<sup>7</sup> Un fluide n'a pas de forme privilégiée puisqu'il adopte la forme du récipient dans lequel il se trouve. Les notions de déformation sont donc surtout importantes pour les solides. Pour les fluides, c'est plutôt la *vitesse* de déformation qui détermine les forces internes comme on le verra dans la suite.

Considérons donc une 2<sup>ème</sup> particule matérielle, voisine de  $\mathbf{X}$ , que l'on notera  $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$ . Sa position dans la configuration déformée est notée  $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$  et son déplacement  $\mathbf{u}+d\mathbf{u}$  vaut  $\mathbf{u}+d\mathbf{u} = \mathbf{u} - d\mathbf{X} + d\mathbf{x}$ . Notons respectivement  $dS$  et  $ds$  les distances entre ces 2 particules dans les configurations de référence et déformée. On a alors:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX_i^2 \quad (2.5.2)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_i^2 \quad (2.5.3)$$

Pour exprimer la variation de la distance entre deux particules au moyen des variables  $\mathbf{x}$  seulement ou, de manière équivalente, en fonction des variables  $\mathbf{X}$  seulement, il est utile d'introduire les quelques tenseurs décrits ci-dessous.

### LES TENSEURS GRADIENTS DE DEFORMATION

Dans le cadre d'une description lagrangienne, la position relative  $dx_i$  s'exprime en fonction de  $dX_i$  par

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad (2.5.4)$$

où les  $F_{ij}$  sont les composantes du tenseur<sup>8</sup>  $\mathbf{F} = (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x})^T$ , appelé *tenseur gradient de déformation*<sup>9</sup>. Sous forme tensorielle, on écrit

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.5.5)$$

où le tenseur  $\mathbf{F}$  dépend de la variable lagrangienne  $\mathbf{X}$ .

Si l'on considère une description eulérienne, on peut inverser (2.5.4) et écrire :

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j = F^{-1}_{ij} dx_j = f_{ij} dx_j \quad (2.5.6)$$

<sup>8</sup>  $\mathbf{F}$  est un tenseur car ses composantes  $F_{ij}$  satisfont bien à la loi tensorielle. En effet, si le changement de coordonnées vers des coordonnées "primées" est défini par  $x_i = M_{il} x'_l + b_i$ ,  $X_j = M_{jk} X'_k + b_j$ ,  $x'_j = M_{ij}(x_i - b_i)$ ,  $X'_k = M_{jk}(X_j - b_j)$ , on a successivement :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X'_k}{\partial X_j} \frac{\partial (M_{il} x'_l + b_i)}{\partial X'_k} = M_{jk} M_{il} \frac{\partial x'_l}{\partial X'_k} = M_{il} M_{jk} F'_{lk}.$$

<sup>9</sup> Le *théorème de décomposition polaire*, qui se démontre aisément en algèbre, montre que l'on peut toujours écrire la matrice (le tenseur)  $\mathbf{F}$  sous la forme  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$  où  $\mathbf{R}$  est une rotation ( $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ ) et  $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{V}$  sont des dilatations pures (les dilatations pures sont définies par des matrices s. d. p. qui décrivent bien des « dilatations pures » comme on peut s'en convaincre en pensant à la réduction à la forme diagonale : dilatation suivant 3 axes deux à deux perpendiculaires). Ce théorème permet une interprétation géométrique intéressante. En effet, on peut en déduire que tout déplacement d'un volume infinitésimal au voisinage de  $\mathbf{X}$  peut se décomposer en : 1. une translation (qui n'est pas contenue dans  $\mathbf{F}$ ) d'un vecteur constant égal à  $\mathbf{x} - \mathbf{X}$ ; 2. une rotation  $\mathbf{R}$ ; 3. Une dilatation pure  $\mathbf{V}$  (on peut aussi inverser l'ordre pour la rotation et la déformation). Ajoutons encore que cette interprétation est tout aussi valable pour le tenseur  $\mathbf{f}$  défini un peu plus bas. En résumé, on voit que les déformations d'un milieu continu peuvent être définies par les tenseurs  $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{V}$  (ou les équivalents eulériens  $\mathbf{u}$  ou  $\mathbf{v}$ ). Ces tenseurs sont cependant peu aisés à calculer dans la pratique car leur détermination requiert la factorisation de  $\mathbf{F}$ . Pour cette raison, on introduit plutôt les tenseurs de dilatation et de déformation qui sont plus aisés à déterminer.

où les  $f_{ij} = F^{-1}_{ij}$  sont les composantes du tenseur  $\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1}$ , inverse du tenseur  $\mathbf{F}$ . Sous forme tensorielle, on écrit

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.7)$$

---

**LES TENSEURS DES DILATATIONS ET LES TENSEURS DES DEFORMATIONS**

---

Le tenseur des dilatations lagrangien  $\mathbf{C}$  est introduit afin de calculer les longueurs dans la configuration déformée à partir des différences de position dans la configuration de référence. De même, le tenseur des dilatations eulérien  $\mathbf{c}$  permet d'évaluer les longueurs dans la configuration de référence à partir des différences de position dans la configuration déformée. On a donc

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \\ dS^2 &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{c} &= \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Les tenseurs des déformations lagrangien (dit «de Green») et eulérien (dit «d'Almansi»)  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{e}$  permettent quant à eux de calculer les variations des distances entre deux particules. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{L} \cdot d\mathbf{X} \\ ds^2 - dS^2 &= 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Remarquons enfin que les tenseurs  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{e}$  sont symétriques<sup>10</sup>.

---

**LES TENSEURS DES DEFORMATIONS ET LES CHAMPS DE DEPLACEMENT**

---

Les tenseurs introduits précédemment peuvent aussi être définis en termes des champs de déplacement. On introduit tout d'abord les tenseurs gradients de déplacements lagrangien  $\mathbf{J}$  et eulérien  $\mathbf{j}$  :

$$\mathbf{J} = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \quad \mathbf{j} = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \quad (2.5.12)$$

Dans ces conditions, on a

$$\mathbf{J} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad \mathbf{j} = \mathbf{1} - \mathbf{f} \quad (2.5.13)$$

---

<sup>10</sup> Les tenseurs  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{e}$  peuvent s'exprimer en fonction des tenseurs de rotation et de dilatation introduits dans la note qui précède. On voit alors que les tenseurs de rotation disparaissent (on a par exemple  $\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$ ).

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) \quad (2.5.14)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) \quad (2.5.15)$$

### INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Il est intéressant d'interpréter géométriquement les composantes des tenseurs des déformations. Considérons tout d'abord des écarts initiaux parallèles aux axes. Pour  $d\mathbf{X} = (dX, 0, 0)$ , on a :

$$ds^2 = (1 + 2L_{11})dX^2 \quad (2.5.16)$$

Les éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{L}$  fournissent donc une mesure des allongements le long des axes du système de coordonnées ( $L_{11} = (1/2)(ds^2 - dS^2)/dS^2$ ).

Considérons ensuite la variation de l'angle droit que forment les axes dans la configuration initiale. Soient  $d\mathbf{X} = (dX, 0, 0)$ ,  $d\mathbf{Y} = (0, dY, 0)$ . Soient  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{y}$  les vecteurs images dans la configuration déformée de ces vecteurs  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{Y}$ . Considérons l'angle  $\gamma_{12}$  formé par  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{y}$ . On a :

$$\cos \gamma_{12} = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{\|d\mathbf{x}\| \|d\mathbf{y}\|} = \frac{2L_{12}}{(1 + 2L_{11})^{1/2} (1 + 2L_{22})^{1/2}} \quad (2.5.17)$$

On peut enfin évaluer la variation d'un élément différentiel de volume. Considérons un petit parallélépipède rectangle  $dV_0$  de la configuration de référence dont les côtés  $d\mathbf{X}$ ,  $d\mathbf{Y}$  et  $d\mathbf{Z}$  sont parallèles aux axes principaux du tenseur symétrique  $\mathbf{L}$ . Dans ces axes, on a  $d\mathbf{X} = (dX, 0, 0)$ ,  $d\mathbf{Y} = (0, dY, 0)$  et  $d\mathbf{Z} = (0, 0, dZ)$ . Le volume de ce parallélépipède est donc donné par  $dV_0 = dX dY dZ$ . Notons ensuite  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{y}$  et  $d\mathbf{z}$  les images de ces 3 vecteurs dans la configuration déformée. Puisque les côtés du parallélépipède rectangle de départ sont parallèles aux axes principaux de  $\mathbf{L}$ , (2.5.17) nous apprend que  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{y}$  et  $d\mathbf{z}$  sont perpendiculaires deux à deux : l'image du parallélépipède de départ est aussi un parallélépipède rectangle. Son volume  $dV$  est donc égal à  $\|d\mathbf{x}\| \|d\mathbf{y}\| \|d\mathbf{z}\|$ . En utilisant (2.5.16) le long des 3 axes, il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dV_0} &= \frac{\|d\mathbf{x}\| \|d\mathbf{y}\| \|d\mathbf{z}\|}{dX dY dZ} \\ &= \sqrt{(1 + 2L_{11})(1 + 2L_{22})(1 + 2L_{33})} \\ &= \sqrt{dtm(\mathbf{I} + 2\mathbf{L})} \end{aligned}$$

car la matrice  $\mathbf{I} + 2\mathbf{L}$  est diagonale en même temps que  $\mathbf{L}$ . Comme le déterminant d'un tenseur d'ordre 2 est un scalaire (tenseur d'ordre 0), le résultat ci-dessus est valable non seulement dans les axes propres de  $\mathbf{L}$  mais aussi dans tout système d'axes. On a donc le résultat général<sup>11</sup> :

<sup>11</sup> Sans recourir aux axes propres de  $\mathbf{L}$ , on peut aussi démontrer directement le résultat de la manière suivante :

$$\frac{dV}{dV_0} = \sqrt{dtm(\mathbf{I} + 2\mathbf{L})} = \sqrt{dtm \mathbf{C}} \quad (2.5.18)$$

### CAS DES PETITS DEPLACEMENTS

---

Lorsqu'on étudie les déformations de corps solides, on peut très souvent considérer que les configurations déformées restent « voisines » d'une configuration de référence. De nombreux matériaux, tels que l'acier par exemple, se déforment en effet très peu, même lorsqu'ils sont soumis à d'importantes forces extérieures. Il est donc intéressant d'examiner comment l'étude des déformations peut se simplifier dans ces circonstances.

Désignons par  $u_{MAX}$  l'amplitude maximale des déplacements dans un problème donné. Si  $L$  représente une longueur caractéristique du système étudié, on peut écrire les déplacements sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \eta \mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t) \quad (2.5.19)$$

avec

$$\eta = \frac{u_{MAX}}{L} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t) = \frac{L}{u_{MAX}} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

Par construction,  $\mathbf{u}^*$  est d'ordre  $L$  et les dérivées spatiales de  $\mathbf{u}^*$  sont d'ordre 1 ; les dérivées temporelles de  $\mathbf{u}^*$  sont quant à elles d'ordre  $LT^{-1}$ , où  $T$  représente un temps caractéristique du système étudié.

L'hypothèse dite *des petites perturbations autour d'une configuration de référence* (« HPP ») ou aussi *hypothèse des petits déplacements*, est définie par le fait que le paramètre  $\eta$  est « petit » ou « infinitésimal », ce qui signifie que  $u_{MAX}$  est petit par rapport à la longueur caractéristique  $L$ .

Dans ce contexte, on peut voir que les descriptions lagrangienne et eulérienne peuvent être confondues en première approximation car les coordonnées lagrangiennes  $\mathbf{X}$  et eulériennes  $\mathbf{x}$  peuvent être identifiées, si on limite les équations à leur terme dominant. Pour toute propriété physique  $f$ , on peut écrire à l'ordre le plus bas en  $\eta$  (et en utilisant des notations connues) :

$$f_L(\mathbf{X}) = f_e(\mathbf{x}) = f_e(\mathbf{X} + \eta \mathbf{u}^*) = f_e(\mathbf{X}) + o(\eta)$$

On a donc

$$\begin{aligned} dV &= \left| \varepsilon_{ijk} dx_i dx_j dx_k \right| = \left| \varepsilon_{ijk} F_{il} dX_l F_{jp} dX_p F_{kq} dX_q \right| \\ &= \left| \varepsilon_{ijk} F_{il} F_{jp} F_{kq} dX_l dX_p dX_q \right| \\ &= \left| \varepsilon_{lpq} dtm(\mathbf{F}) dX_l dX_p dX_q \right| \\ &= |dtm(\mathbf{F})| dV_0 \\ &= dtm(\mathbf{F}) dV_0, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que  $dtm(\mathbf{F})$  ne s'annule pas et vaut 1 en  $t = 0$ . Le résultat final s'obtient alors en notant que  $\mathbf{I} + 2\mathbf{L} = \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ .

$$f_L(\mathbf{X}) \approx f_e(\mathbf{X}) \quad (2.5.20)$$

On a de même

$$f_L(\mathbf{x}) \approx f_e(\mathbf{x}) \quad (2.5.21)$$

De la même façon, on peut identifier les dérivées spatiales lagrangiennes avec les dérivées spatiales eulériennes. On peut également confondre les dérivées partielles par rapport à  $t$  dans une description lagrangienne avec les mêmes dérivées temporelles partielles calculées dans une description eulérienne (en particulier, la dérivée particulière eulérienne se réduit à la dérivée partielle par rapport à  $t$  si on ne conserve que le terme dominant). On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_L(\mathbf{X}, t)}{\partial X_i} &\approx \frac{\partial f_e(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_L(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &\approx \frac{\partial f_e(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

On peut donc ne plus distinguer les coordonnées lagrangiennes et les coordonnées eulériennes.

Dans ce contexte des petits déplacements, les tenseurs des déformations eulérien  $\mathbf{e}$  (2.5.14) et lagrangien  $\mathbf{L}$  (2.5.15) peuvent être simplifiés en ne conservant que les termes linéaires en les gradients des déplacements. Les termes quadratiques sont en effet d'ordre  $\eta^2$  et sont donc négligés.

De plus, si on identifie les coordonnées lagrangiennes et eulériennes, un tenseur unique subsiste que l'on appelle *tenseur des déformations infinitésimales* et que l'on note souvent  $\varepsilon$ <sup>12</sup> :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (2.5.23a)$$

avec

$$\mathbf{L} \approx \mathbf{e} \approx \varepsilon \approx \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T) \approx \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T), \quad (2.5.23b)$$

L'interprétation géométrique des composantes de ce tenseur se déduit de l'interprétation des composantes du tenseur  $\mathbf{L}$  donnée plus haut. Considérons tout d'abord deux particules matérielles voisines sur l'axe  $X$  dans la configuration initiale. Pour  $d\mathbf{X} = (dX, 0, 0)$ , on déduit de (2.5.16), en ne conservant que les termes du premier ordre :

$$ds = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} dX \approx (1 + \varepsilon_{11}) dX$$

Si l'on note  $dS$  la longueur du vecteur  $d\mathbf{X}$ , on a donc

---

<sup>12</sup> L'équivalent du théorème de décomposition polaire dans le cas des petites perturbations est donné par la décomposition du tenseur gradient de déplacements  $\mathbf{J}$  ses parties symétrique  $\varepsilon$  et antisymétrique  $\omega$  ;  $\varepsilon$  est le tenseur des dilatations infinitésimales et  $\omega$  le tenseur de rotation infinitésimale. On a alors  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \varepsilon + \omega \approx (\mathbf{I} + \varepsilon)(\mathbf{I} + \omega)$ .

$$\varepsilon_{11} = \frac{ds - dS}{dS} \quad (2.5.24)$$

Les éléments diagonaux de la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont donc les allongements relatifs le long des axes de la configuration de référence.

Considérons ensuite  $d\mathbf{X} = (dX, 0, 0)$ ,  $d\mathbf{Y} = (0, dY, 0)$  et notons  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{y}$  leurs vecteurs images dans la configuration déformée. L'angle  $\gamma_{12}$  formé par  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{y}$  est donné par (2.5.17). Au premier ordre, on a donc :

$$\cos \gamma_{12} \approx \frac{\pi}{2} - \gamma_{12} \approx 2\varepsilon_{12}$$

Il en résulte que

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{12} \right) \quad (2.5.25)$$

Les éléments non diagonaux donnent donc la moitié de la réduction de l'angle droit formé par les vecteurs de base dans la configuration de référence.

La variation d'un élément différentiel de volume s'obtient comme (2.5.18). Dans des axes propres de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dV_0} &= \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{22})(1 + 2\varepsilon_{33})} \\ &\approx (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) \\ &\approx (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= 1 + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned}$$

Comme la trace d'un tenseur est un scalaire, on a, dans tout système d'axes<sup>13</sup> :

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} \approx \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.5.26)$$

La dilatation relative d'un élément de volume est donc égale à la trace du tenseur des déformations infinitésimales, c'est-à-dire à la divergence du champ des déplacements.

---

<sup>13</sup> Sans recourir aux axes propres de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on peut aussi démontrer le résultat à partir de (2.5.18) écrit sous la forme  $dV / dV_0 = dtm(\mathbf{F})$ . Comme  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ , avec  $\mathbf{J}$  infinitésimal, on a, grâce à un développement limité au premier ordre :

$$\begin{aligned} dtm(\mathbf{F}) &= dtm(\mathbf{I} + \mathbf{J}) = dtm(\delta_{ij}) + J_{ij} \left. \frac{\partial dtm(\delta_{kl} + J_{kl})}{\partial J_{ij}} \right|_{J_{kl}=0} \\ &= 1 + J_{ij} \left( dtm(\delta_{kl} + J_{kl})(\delta_{ij} + J_{ij})^{-1} \right)_{J_{kl}=0} \\ &= 1 + J_{ij} \delta_{ij} = 1 + \varepsilon_{ij} \delta_{ij} = 1 + \varepsilon_{kk}, \end{aligned}$$

en ayant utilisé le fait que la dérivée d'un déterminant par rapport à un élément de la matrice est égal au déterminant que multiplie le mineur de l'élément en question (que l'on a exprimé en termes de la matrice inverse).

## 2.6 Le tenseur taux de déformation et le tenseur de vorticité (ou de spin)

Nous avons brievement indiqué que dans les solides, les forces internes sont engendrées par les déformations. Dans les fluides, il est facile de comprendre intuitivement que la notion de déformation ne peut être très significative. En effet, un fluide ne possède pas de forme privilégiée puisqu'il adopte en général la forme du récipient dans lequel il se trouve. Il ne paraît donc pas possible de définir une configuration de référence intrinsèque à partir de laquelle des déformations pourraient être mesurées de manière significative. Dans un fluide, les particules de matière peuvent être mises en mouvement les unes par rapport aux autres par des forces aussi petites que l'on veut. Bien sûr, le fluide oppose une résistance à ce mouvement et il est facile d'imaginer que cette résistance sera d'autant plus grande que les frottements entre les particules de fluide seront importants. Ces frottements sont engendrés par le fait que des particules matérielles voisines possèdent des vitesses distinctes engendrant des glissements relatifs entre ces particules. Pour cette raison, ce sont les gradients de vitesse, ou plus exactement ce que l'on appellera les taux de déformation, qui apparaîtront lors de la formulation d'équations constitutives pour les fluides.

Pour introduire le tenseur taux de déformation et le tenseur de rotation, nous allons nous intéresser aux variations spatiales du champ de vitesse eulérienne dans le voisinage d'un point  $\mathbf{x}$  (Fig. 2.4). De manière plus précise, nous allons tenter de séparer dans l'expression de ce champ de vitesse la partie correspondant à un déplacement d'ensemble du voisinage du point  $\mathbf{x}$  de la partie décrivant les « glissements » évoqués ci-dessus.

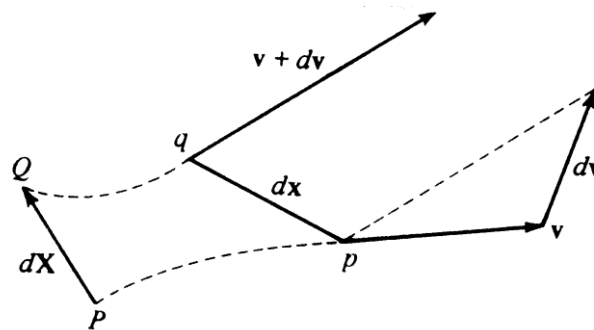


Fig. 2.4

  un instant fixé  $t$ , la vitesse au point  $\mathbf{x}$  est donnée par  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . En un point voisin  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , la vitesse vaut

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6.1)$$

A partir de (2.6.1), on obtient directement

$$d\mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})^T \cdot d\mathbf{x} \quad (2.6.2)$$

où  $\nabla \mathbf{v}$  est le tenseur « gradient de vitesse ».

On peut alors définir le *tenseur taux de déformation*  $\mathbf{V}$  et le *tenseur de vorticité*  $\Omega$ , encore appelé *tenseur taux de rotation*, comme les parties symétrique et antisymétrique du transposé du tenseur gradient de vitesse. On a

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \text{ et } \Omega = -\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T) \quad (2.6.3)$$

Les appellations de ces deux tenseurs seront justifiées ci-dessous.

De (2.6.2-3), on déduit :

$$d\mathbf{v} = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} + \Omega \cdot d\mathbf{x} . \quad (2.6.4)$$

On peut alors associer au tenseur antisymétrique  $\Omega$  un vecteur (axial)  $\mathbf{a}$  défini par (cf. (0.15-16)) :

$$a_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} \quad (2.6.5a)$$

avec aussi

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k \quad (2.6.5b)$$

Vu (0.20) on a alors, que quel que soit le vecteur  $\mathbf{b}$  :

$$\Omega \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (2.6.6)$$

Pour le tenseur  $\Omega$  défini en (2.6.3), on a

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \quad (2.6.7)$$

où le *vecteur vorticité*  $\boldsymbol{\omega}$  est défini comme étant égal au rotationnel du champ de vitesse :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (2.6.8)$$

Le champ de vitesse en le point  $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$  peut finalement s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) + d\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} + \Omega \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, grâce à (2.6.6-8)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} \quad (2.6.9)$$

Cette formule généralise à un milieu continu déformable la formule donnant le champ de vitesse d'un solide. On voit en effet que le mouvement dans le voisinage du point  $\mathbf{x}$  se décompose en trois parties, correspondant aux trois termes du membre de droite. On a tout d'abord une translation d'ensemble à vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Le troisième terme rend compte quant à lui d'une rotation d'ensemble du voisinage de  $\mathbf{x}$  avec une vitesse angulaire égale à la moitié du

vecteur vorticité<sup>14</sup>. Notons que ce terme peut aussi s'exprimer en fonction du tenseur  $\Omega$  qui trouve donc ici la justification de son appellation. Le terme central décrit les déformations du voisinage du point  $\mathbf{x}$  en faisant apparaître le tenseur taux de déformation. La justification de l'appellation de ce tenseur se fait en calculant le taux de variation temporelle de la distance  $ds$  entre la particule matérielle qui se trouve en  $\mathbf{x}$  et celle qui se trouve en  $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ .

On a<sup>15</sup>

$$\frac{\partial(ds^2)}{\partial t} = 2d\mathbf{x} \cdot \frac{\partial(d\mathbf{x})}{\partial t} \quad (2.6.10)$$

Pour calculer le taux de variation de  $d\mathbf{x}$ , on considère le mouvement des 2 particules matérielles qui se trouvent en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ . On a tout d'abord

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_i} dX_i \quad (2.6.11)$$

On déduit ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial(d\mathbf{x})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot d\mathbf{X}_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_i} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{X}_i \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot d\mathbf{X}_i \\ &= d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ds^2)}{\partial t} &= 2d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{v} \\ &= 2d\mathbf{x} \cdot (\nabla \mathbf{v})^T \cdot d\mathbf{x} \\ &= 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

La dernière égalité résulte du fait que seule la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse intervient dans les opérations de contraction (NB. Comparer avec 2.5.10a !).

<sup>14</sup> C'est l'équivalent du vecteur de Poisson de la théorie du solide indéformable.

<sup>15</sup> On va évaluer le taux de variation dans le cadre d'une description lagrangienne. La dérivée temporelle (matérielle) est donc notée  $\partial / \partial t$ .

## 2.7 Remarques

### 1. RAPPORT ENTRE LE TENSEUR TAUX DE DEFORMATION ET LA DERIVEE DU TENSEUR DES DEFORMATIONS INFINITESIMALES $\varepsilon$

---

Dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements, on montre immédiatement que le tenseur taux de déformation est la dérivée temporelle du tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon$ . On a donc :

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6.14)$$

Soulignons que l'égalité entre le tenseur taux de déformation et la dérivée temporelle du tenseur des déformations n'est valable **que** dans l'hypothèse de déplacements infinitésimaux. Néanmoins, le tenseur  $\mathbf{V}$  est utilisable même si les déplacements ne sont pas infinitésimaux et il continue de représenter les *taux de déformation* (dans la définition d'un *taux* de déformation, on passe à la limite pour des déplacements infiniment petits, même si les déplacements réels sont finis).

### 2. DEFORMATIONS ET DEPLACEMENTS RIGIDES

---

Un déplacement rigide est caractérisé par une relation  $\mathbf{x}(\mathbf{X})$  de la forme<sup>16</sup>

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b} \quad (2.6.15)$$

où  $\mathbf{R}$  est une matrice orthogonale constante et  $\mathbf{b}$  est un vecteur constant. Il est facile de vérifier que les tenseurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{e}$  s'annulent dans ce cas.

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP), le vecteur  $\mathbf{b}$  est supposé infinitésimal et la matrice  $\mathbf{R}$  s'écrit sous la forme

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \Omega \quad (2.6.16)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\Omega$  une matrice infinitésimale. Le caractère orthogonal de la matrice  $\mathbf{R}$  implique que  $\Omega$  est antisymétrique

$$\Omega^T = -\Omega. \quad (2.6.17)$$

Les déplacements  $\mathbf{u}$  peuvent alors s'écrire

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \Omega \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b} \quad (2.6.18)$$

En associant par (0.15-16) le vecteur  $-\mathbf{a}$  à  $\Omega$ , on a donc également

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{a} \times \mathbf{X} + \mathbf{b} \quad (2.6.19)$$

où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont les vecteurs infinitésimaux définissant respectivement la rotation et la translation infinitésimale correspondant au déplacement infinitésimal<sup>17</sup>.

---

<sup>16</sup> C'est la même formule que celle définissant un changement de coordonnées cartésiennes (0.2).

<sup>17</sup> Noter la ressemblance de cette formule avec celle donnant le champ des vitesses d'un solide indéformable !

On vérifie alors facilement que le tenseur des déformations infinitésimales (2.5.23) s'annule bien pour ce champ de déplacement (2.6.18-19).

### 3. CALCUL DU CHAMP DE DEPLACEMENT A PARTIR DU CHAMP DES DEFORMATIONS

Si l'on connaît le champ des déformations dans un milieu, il peut être intéressant d'en déduire le champ des déplacements. Si, pour la simplicité, on se limite dans ce cours aux déplacements infinitésimaux (HPP), on doit donc tenter de résoudre les équations (2.5.23) :

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \varepsilon \quad (2.6.20)$$

où le tenseur  $\varepsilon$  est supposé connu. En récrivant cette équation en composantes, on voit qu'il s'agit d'un problème d'intégration dans  $\mathbb{R}^3$  pour les 3 inconnues  $u_i$ . Le champ des déformations  $\varepsilon$  donné doit alors satisfaire à certaines conditions de compatibilité<sup>18</sup> (des conditions d'intégrabilité) pour que le problème ait une solution. Ces conditions, que nous n'étudierons pas en détail, portent le nom de « conditions de compatibilité de Saint Venant ».

Soulignons aussi que la résolution de ces équations fait apparaître des « constantes d'intégration » qui traduisent le fait que les déplacements correspondant à des déformations données ne sont déterminés qu'à un déplacement rigide près.

Pour fixer univoquement ce déplacement rigide, on peut fixer arbitrairement la translation d'une particule matérielle  $P$  ainsi que la rotation dans son voisinage. Pour fixer la translation, on écrira donc une condition du type

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}_0 \quad (2.6.21)$$

Pour fixer la rotation dans le voisinage de  $P$ , nous allons partir de la formule (2.6.9) donnant le champ des vitesses dans le voisinage d'un point. Cette formule est tout à fait générale et ne nécessite pas l'HPP. Dans le contexte des petits déplacements, on peut néanmoins la particulariser de la manière suivante. De manière un peu formelle, on peut tout d'abord multiplier (2.6.9) par l'intervalle de temps élémentaire  $dt$ . Ensuite, si le déplacement  $\mathbf{u}$  est infinitésimal, on peut l'assimiler au produit  $\mathbf{v}dt$ . De la même manière,  $\mathbf{V}dt$  peut être remplacé par le tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon$ . Il vient donc, au voisinage du point  $P$  de coordonnées  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times d\mathbf{x} \quad (2.6.22)$$

L'interprétation de ce résultat se fait comme celle de (2.6.9). En particulier, c'est le troisième terme qui définit la rotation dans le voisinage de  $P$ . Fixer la rotation dans le voisinage de  $P$  consiste donc à imposer une condition du genre

$$\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u})|_P = \mathbf{a}_0 \quad (2.6.23)$$

<sup>18</sup> Physiquement, l'origine de ces conditions de compatibilité peut se comprendre comme suit. Séparons par la pensée une portion de matière en petits volumes auxquels on applique séparément des déformations. Pour que les petits blocs ainsi déformés puissent encore s'assembler après le processus de déformation, il faut évidemment que les déformations des différents volumes soient « compatibles » entre elles.

## 2.8 Application : Changements homogènes de configuration

Etant donné un système de coordonnées, considérons le changement de configuration suivant :

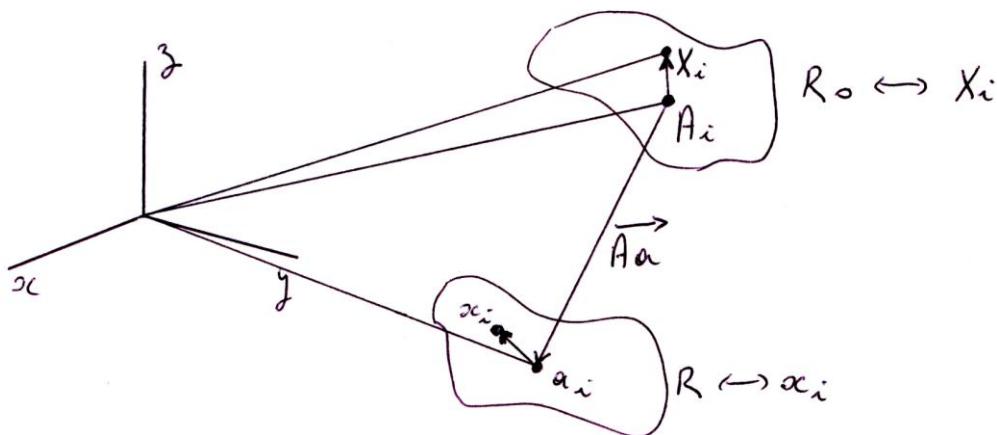
$$x_i = a_i + M_{ij}(X_j - A_j) \quad (1)$$

avec  $a_i$  et  $A_j$  des constantes. La matrice  $M$  est supposée inversible ( $\det M \neq 0$ ), et on a donc aussi

$$X_i = A_i + M_{ij}^{-1}(x_j - a_j) \quad (2)$$

Lorsque  $M_{ij}$  est indépendant de  $x$  et  $X$ , le changement de configuration est dit « homogène ». Ce changement de configuration est linéaire et les droites de la configuration de référence  $R_0$  restent des droites dans la configuration déformée  $R$ .

Cette transformation peut être vue comme la composition d'une translation de vecteur  $\vec{Aa}$  et d'une rotation-déformation autour du point  $a$ .



Le tenseur gradient de déformation, le tenseur des dilatations et le tenseur des déformations sont donnés par :

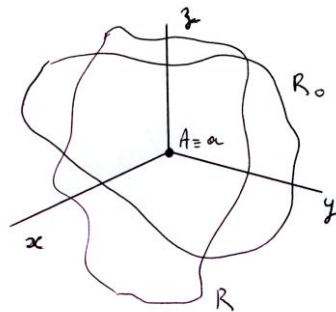
$$F = M, \quad C = M^T M, \quad L = \frac{1}{2}(M^T M - \mathbf{1})$$

$$f = M^{-1}, \quad c = M^{-1T} M^{-1}, \quad e = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - M^{-1T} M^{-1})$$

On remarque que tous ces tenseurs sont constants (indépendants de la position) et c'est pour cette raison que les changements de configuration envisagés ici sont dits *homogènes*. On voit également que les quantités  $a_i$  et  $A_j$  n'apparaissent pas dans ces relations et que seul  $M$  intervient dans ces tenseurs. On peut donc ne pas prendre en compte la translation sans perte de généralité ( $A \equiv a$ ). En outre, en choisissant les axes de manière appropriée, on peut supposer que  $A \equiv a$  est confondu avec l'origine du système de coordonnées. Le changement

de configuration homogène le plus général du point de vue qui nous intéresse peut donc s'écrire :

$$x_i = M_{ij} X_j \quad (3)$$



Envisageons à présent quelques cas particuliers de matrice  $M$ .

1. Premier cas :  $M$  orthogonal

- Rotation autour de l'origine
- Dilatations  $C = \mathbb{1}$  et  $c = \mathbb{1}$
- Déformations  $L = 0$  et  $e = 0$  (pas de déformations et donc  $\frac{dV}{dV_0} = 1$ )

2. Deuxième cas :  $M = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$   $\alpha, \beta, \gamma > 0$

- Dilatation suivant les 3 axes, de facteurs  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$\bullet F = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha^2 & & \\ & \beta^2 & \\ & & \gamma^2 \end{pmatrix} \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & & \\ & \beta^2 - 1 & \\ & & \gamma^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & & \\ & \beta^{-1} & \\ & & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} \alpha^{-2} & & \\ & \beta^{-2} & \\ & & \gamma^{-2} \end{pmatrix} \quad e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \alpha^{-2} & & \\ & 1 - \beta^{-2} & \\ & & 1 - \gamma^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} = \alpha\beta\gamma$$

- Pas de variation des angles entre les axes du système de coordonnées.
- Si on fait l'HPP, on peut écrire  $\alpha = 1 + \varepsilon_a, \beta = 1 + \varepsilon_b, \dots$ . On a alors

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \varepsilon_a X \\ \varepsilon_b Y \\ \varepsilon_c Z \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_a & & \\ & \varepsilon_b & \\ & & \varepsilon_c \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\varepsilon_a)^2 - 1 & & \\ & -- & \\ & & -- \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2\varepsilon_a - 1 & & \\ & -- & \\ & & -- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_a & & \\ & \varepsilon_b & \\ & & \varepsilon_c \end{pmatrix} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon_a)^2} & & \\ & -- & \\ & & -- \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-1-\varepsilon_a(-2) & & \\ & -- & \\ & & -- \end{pmatrix} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Généralisation : si  $M$  est une matrice *s.d.p.*, on a le même genre de comportement. Pour s'en persuader, il suffit de raisonner dans les axes propres. On parle de **déformation pure**. Dans le cas particulier où  $M = \alpha \mathbb{1}$ , on parle de **dilatation pure** (isotrope). Si  $\alpha < 1$ , il s'agit d'une compression.

### 3. Troisième cas : notion de cisaillement *simple*

$$\bullet \begin{cases} x_1 = X_1 + kX_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

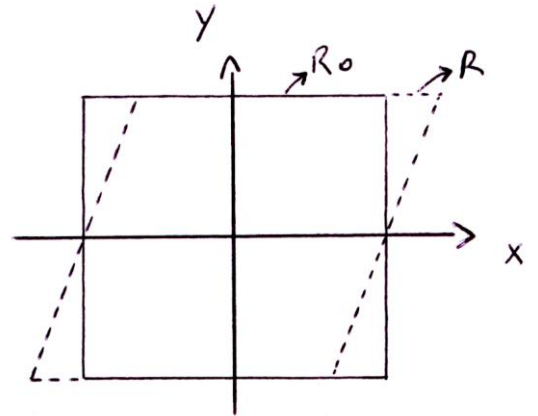
$$\bullet F = M = \begin{pmatrix} 1 & k & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ k & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & \\ k & k^2 + 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet L = \frac{1}{2}(C - 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & k & \\ k & k^2 & \\ & & \end{pmatrix}$$

- Variations d'angle entre les axes  $x$  et  $y$  non nulles, variations de longueur suivant  $y$  (d'ordre 2 par rapport à  $k$ )

$$\bullet \frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\det C} = 1$$



4. Troisième cas : notion de cisaillement pur

- $$\begin{cases} x = X + kY \\ y = \sqrt{1-k^2} Y \text{ avec } k = \sin \alpha \quad (|k| \leq 1) \\ z = Z \end{cases}$$

- $$F = \begin{pmatrix} 1 & k \\ & \sqrt{1-k^2} \end{pmatrix}$$

- $$C = \begin{pmatrix} 1 & \\ k & \sqrt{1-k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ & \sqrt{1-k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

- $$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & k \\ k & \end{pmatrix} \quad (\text{cisaillement « pur »})$$

- variation de l'angle du dièdre  $(x, y)$  mais pas de variation des longueurs le long des axes.

- $$\frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\det C} = \sqrt{1-k^2} \neq 1$$

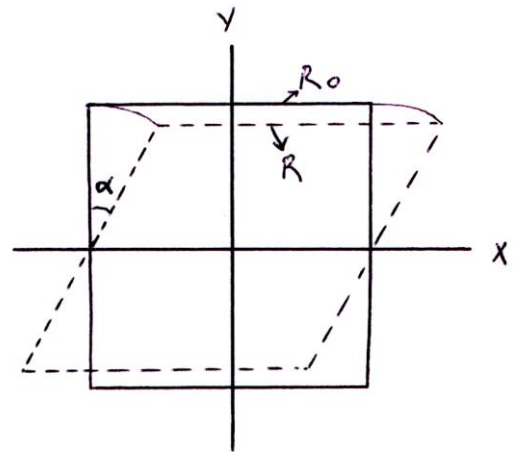
- Si HPP ( $k$  infinitésimal), les notions de cisaillement simple et de cisaillement pur sont identiques.

- Dans les axes propres  $(1,1)$  et  $(1,-1)$  du tenseur  $L$ , on a

$$L' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k & \\ & -k \end{pmatrix},$$

d'où allongement le long d'une bissectrice du dièdre  $(x, y)$  et rétrécissement le long de l'autre (autre façon d'interpréter géométriquement le cisaillement pur).

- Dans les axes propres dont on vient de parler, la transformation peut être vue comme une dilatation avec  $\alpha = \sqrt{1+k}$  et  $\beta = \sqrt{1-k}$ .



## 3 Lois de conservation

Nous voudrions à présent dégager les lois physiques les plus générales qui régissent l'évolution des milieux continus. Une des difficultés qui apparaît dans l'étude de ces milieux continus est la détermination de ce qu'on appelle les «variables d'état» du système : il n'est pas toujours aisé de savoir quelles sont les grandeurs «importantes» dans un phénomène que l'on observe dans un milieu continu. Un exemple permet de préciser cette idée. Lorsqu'une navette spatiale rentre dans l'atmosphère, on sait que les parois extérieures du véhicule sont soumises à des températures très élevées. Il est évidemment de première importance lorsque l'on tente de décrire la rentrée de navette de connaître ces températures et de tenir compte de leur influence. La variable «température» est donc une variable d'état nécessaire dans ce cas. En revanche, si l'on s'intéresse au frottement de l'air sur une voiture, les échauffements produits par la dissipation dans l'air seront peu importants et on pourra ne pas prendre en compte la variable température.

Ayant répertorié les variables d'état d'un système, il faut ensuite déterminer quels principes physiques gouvernent leurs évolutions. Dans les cas les plus simples que nous allons considérer dans la suite, ces principes physiques sont les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie. Pour être complet, il convient aussi d'ajouter le second principe de la thermodynamique. Les variables d'état dont ces principes décrivent les variations spatio-temporelles sont les champs de densité, de vitesse, de température et d'entropie. Dans des cas plus complexes, des variables d'état supplémentaires peuvent s'avérer nécessaires comme, par exemple, les concentrations de divers constituants en présence, des variables électromagnétiques (champ électrique ou magnétique), des variables biologiques (population de telle ou telle espèce animale ou végétale), etc... Les principes «physiques» décrivant les évolutions de ces variables sont alors des lois de transformations chimiques, des lois décrivant des phénomènes électriques ou magnétiques (équations de Maxwell), des lois biologiques etc....

Il est intéressant de souligner que les principes physiques auxquels nous faisons référence ici sont des lois dont la portée est tout à fait générale. Ces lois fondamentales de la nature s'appliquent indifféremment à tous les types de milieux continus et ne permettent pas de rendre compte des propriétés propres des différents types de matériaux. Ces propriétés caractéristiques des milieux continus seront envisagées dans un chapitre ultérieur et seront décrites au moyen d'équations dites *phénoménologiques*. Cette appellation provient de l'origine souvent expérimentale de ces équations, mais on verra que celles-ci peuvent aussi être envisagées d'un point de vue plus théorique dans le contexte de la Thermodynamique des phénomènes irréversibles.

Avant de les formuler de manière détaillée dans ce qui suit, il est intéressant de décrire en quelques mots les lois physiques qui vont permettre de rendre compte de l'évolution des milieux continus les plus simples. Notons aussi dès à présent que nous

limitons dans ce cours à des milieux continus homogènes, c'est-à-dire des milieux formés d'un seul constituant<sup>1</sup>.

Le premier principe physique que l'on admet en mécanique des milieux continus est le principe de conservation de la masse, qui s'exprime mathématiquement par *l'équation de continuité*. Il traduit la permanence de la matière qui ne peut disparaître ou apparaître spontanément.

Pour décrire les mouvements (macroscopiques) qui apparaissent dans un milieu continu lorsque des forces lui sont appliquées, on fait appel au principe de conservation de la quantité de mouvement et au principe de conservation du moment cinétique. Pour un point matériel, il est bien connu que ces deux principes sont le plus souvent équivalents. En mécanique des milieux continus, ces deux principes sont indépendants et permettent de décrire les mouvements en translation et en rotation de portions de matière (ou de particules matérielles) possédant une extension spatiale non nulle.

A ces lois physiques d'origine « mécanique », il convient ensuite d'ajouter les lois de la thermodynamique des phénomènes irréversibles. La thermodynamique des phénomènes irréversibles est la généralisation à des phénomènes de non-équilibre des lois de la thermostatique<sup>2</sup>. Le premier principe de la thermodynamique introduit la notion d'énergie interne et traduit l'équivalence des différentes formes d'énergie. Le second principe permet quant à lui d'introduire les notions d'entropie et de température ainsi que de traduire le caractère irréversible des phénomènes que l'on observe dans les milieux continus. Ajoutons encore que l'on utilise aussi l'appellation « thermomécanique des milieux continus » pour désigner l'étude des milieux continus lorsque l'on prend en compte ces lois thermodynamiques décrivant les phénomènes liés à la propagation de la chaleur.

### 3.1 Lemme : dérivée temporelle d'intégrales volumiques eulériennes

Avant d'écrire les lois fondamentales de la thermomécanique des milieux continus, il est nécessaire d'introduire un lemme permettant d'évaluer la dérivée temporelle d'une quantité  $F(t)$  définie par :

$$F(t) = \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.1.1)$$

où le volume  $V(t)$  représente le volume de l'espace physique (« eulérien ») occupé à l'instant  $t$  par une quantité de matière invariable (ce volume se déplace donc avec les particules matérielles dont il est constitué). Les quantités  $f$  et  $F$  sont des champs tensoriels d'ordre  $N$

---

<sup>1</sup> Cette hypothèse d'homogénéité du milieu n'implique absolument pas que tous les champs définissant les variables d'état (pression, température, vitesse, ...) sont homogènes, c'est-à-dire uniformes, ou invariables, dans l'espace ! Seule la variable d'état "composition chimique" est en fait homogène !

<sup>2</sup> Afin de la distinguer clairement de la thermodynamique des phénomènes de non-équilibre, ou thermodynamique des phénomènes irréversibles, nous utilisons le terme « thermostatique » pour désigner ce qu'on appelle souvent la « thermodynamique (classique) ».

quelconque et l'on peut considérer  $f$  comme la densité par particule matérielle de la propriété  $F$ .

L'évaluation de la dérivée de l'intégrale est basée sur un changement de variables qui consiste à utiliser les variables lagrangiennes à la place des variables eulériennes. Cette démarche est assez semblable à celle utilisée lors de l'introduction de la dérivée matérielle  $d/dt$ . En procédant de la sorte, on ramène l'intégration sur un volume variable à une intégration sur un volume fixe, défini par le volume initial occupé par les particules. On a donc :

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \\ &= \int_{V_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) |J| dV_0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

où  $J$  est le jacobien du changement de variables et  $V_0$  désigne le volume  $V(t)$  à l'instant initial. On a donc  $J = \text{det}(\mathbf{F})$ , avec

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x})^T \quad \left( F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)$$

Remarquons que le jacobien  $J$  est toujours positif car il vaut 1 à l'instant initial et il ne change pas de signe puisqu'il est toujours non nul. Les barres de valeur absolue peuvent donc disparaître dans (3.1.2)

On peut alors dériver (3.1.2) par rapport au temps sous le signe d'intégration puisque  $V_0$  ne dépend plus de  $t$ . Il vient<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) J) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)) J dV_0 + \int_{V_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t} dV_0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Evaluons la dérivée du jacobien  $J$ , en considérant que ce jacobien dépend du temps par l'intermédiaire des éléments  $F_{ij}$  de la matrice  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ . Il vient :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial}{\partial t} (F_{ij}) \quad (3.1.4)$$

Evaluons ensuite la dérivée de  $J$  par rapport à  $F_{ij}$  ( $i$  et  $j$  sont fixés). On peut écrire, par définition des déterminants, et en développant suivant la  $j^{\text{ème}}$  colonne par exemple :

<sup>3</sup> Dans le membre de gauche de (3.1.3), la dérivée notée  $d/dt$  désigne une dérivée classique par rapport à  $t$  d'une fonction de  $t$  seul. Dans le membre de droite, la dérivée  $\partial/\partial t$  est une dérivée partielle dans un contexte lagrangien.

$$J = \sum_k F_{kj} \times (\text{Mineur de l'élément } (k, j)) \quad (\text{pas de somme sur } j!) \quad (3.1.5)$$

Puisque le mineur de l'élément  $(k, j)$  ne dépend pas de l'élément  $(i, j)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} &= \sum_k \frac{\partial F_{kj}}{\partial F_{ij}} \times (\text{Mineur de l'élément } (k, j)) \\ &= \text{Mineur de l'élément } (i, j) \\ &= J \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} \right]_{ij} \\ &= J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \sum_{i,j} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial}{\partial t} (F_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \\ &= \sum_i J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ &= J \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

En écrivant symboliquement le jacobien  $J$  sous la forme du rapport des éléments de volume dans la configuration à l'instant initial et dans la configuration à l'instant  $t$  ( $J = dV/dV_0$ ), le résultat (3.1.6) :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.1.7)$$

peut aussi s'écrire

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{dV} \frac{\partial (dV)}{\partial t}. \quad (3.1.8)$$

La divergence du champ de vitesse mesure donc le taux de variation relative de l'élément de volume matériel infinitésimal (ou particule matérielle)  $dV$ . C'est donc également une mesure instantanée du taux de dilatation —ou de l'opposé du taux de compression— locale dans le milieu. Ainsi, un milieu incompressible est caractérisé par un champ de vitesse dont la divergence est partout et toujours égale à zéro.

La dérivée de  $F(t)$  par rapport à  $t$  peut donc s'écrire<sup>4</sup> :

---

<sup>4</sup> Dans la deuxième ligne,  $d/dt$  est la dérivée matérielle eulérienne.

$$\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)) J dV_0 + \int_{V_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \cdot \mathbf{v} J dV_0 \\
&= \int_{V(t)} \frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} dV + \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} dV \\
&= \int_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{V(t)} (\mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}) dV \\
&= \int_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot (f\mathbf{v}) dV
\end{aligned}$$

Les 2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> lignes de l'expression précédente donnent donc :

$$\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= \int_{V(t)} \left( \frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} + f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \\
&= \int_{V(t)} \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) \right) dV
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Par application du théorème de Gauss, on obtient également :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \tag{3.1.10}$$

où  $S(t)$  désigne la surface extérieure du volume  $V(t)$ , de normale extérieure égale à  $\mathbf{n}$ . Le premier terme de (3.1.10) rend compte des variations temporelles de  $F(t)$  dues aux variations locales de l'intégrand  $f$ . Le déplacement (dans l'espace eulérien) du volume matériel  $V(t)$  engendre aussi d'autres variations pour  $F$ . Ces variations, dues au mouvement, sont prises en compte par le second terme de (3.1.10) qui décrit en fait l'apport de la quantité  $f$  dans le volume  $V(t)$  au travers de sa surface extérieure. En effet, considérons un élément de surface  $dS$ , de normale extérieure  $\mathbf{n}$ , faisant partie de la surface de  $V(t)$ . A cause du déplacement de cette surface élémentaire à la vitesse  $\mathbf{v}$ , un certain volume de l'espace eulérien va « entrer » dans le volume matériel  $V(t)$  pendant l'intervalle de temps élémentaire  $dt$ . Ce volume est le cylindre élémentaire représenté dans la Fig. 3.1. La « longueur » de ce cylindre dans la direction du vecteur vitesse est égale à  $\|\mathbf{v}\| dt$  et son volume vaut  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dS$ . L'entrée de ce volume eulérien dans le volume matériel  $V(t)$  engendre bien sûr une augmentation de  $F$  égale à  $f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dS$ . En considérant la totalité de la surface extérieure, on voit donc que les variations de  $F$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  dues au mouvement du volume matériel sont données par  $dt \int_{S(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ . Le second terme de (3.1.10) décrit donc ce que l'on appelle,

pour des raisons évidentes, le « flux convectif<sup>5</sup> de  $f$  à travers la surface extérieure du volume matériel »<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> C'est-à-dire dû à la convection, dû au mouvement du fluide.

<sup>6</sup> Il est intéressant de comparer cette interprétation avec celle donnée pour la dérivée matérielle. En particulier, il importe de remarquer que le terme de flux rencontré ici décrit les variations dues d'une part au « déplacement d'ensemble » de  $V(t)$  et, d'autre part, les variations dues à une éventuelle compression ou dilatation du volume

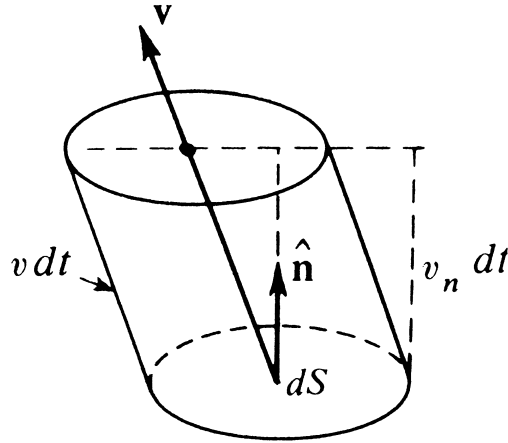


Fig. 3.1

## 3.2 Conservation de la masse

Lorsqu'un milieu continu est homogène, c'est-à-dire formé d'un seul constituant, la présence de matière est décrite localement par la seule variable densité  $\rho$ . Cette variable représente la quantité de matière présente localement par unité de volume. En fonction de cette densité, la masse  $M(t)$  de la quantité de matière (c'est-à-dire la masse des particules matérielles) occupant le volume  $V(t)$  s'écrit :

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.2.1)$$

Si le volume  $V(t)$  est toujours constitué des mêmes particules matérielles ( $V(t)$  se déplace avec les particules matérielles qui le constituent), le principe de conservation de la masse impose que la masse  $M(t)$  doit rester constante au cours du temps. On a donc :

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (3.2.2)$$

En utilisant (3.1.9), il vient

$$\int_{V(t)} \left( \frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad (3.2.3)$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit le volume d'intégration  $V$ , il faut donc que l'intégrand soit identiquement nul<sup>7</sup>. La relation exprimant l'annulation de cet intégrand est

---

matériel. Ce dernier effet n'existait évidemment pas dans l'interprétation de la dérivée matérielle et il est intimement lié au fait que  $f$  est la densité volumique de  $F$ . Dans l'équation (3.1.9.a), c'est le deuxième terme qui rend compte de ce phénomène puisque, vu (3.1.8), on peut écrire formellement  $f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} dV = f(\mathbf{x}, t) d(dV)/dt$ .

<sup>7</sup> Si ce n'était pas vrai, il existerait un point intérieur à  $V$  où l'intégrand serait non nul. Par continuité, il resterait non nul (et donc de signe constant) dans un voisinage de ce point. Dans ces conditions, l'intégrale sur ce voisinage serait non nulle, en contradiction avec le fait que l'intégrale sur tout volume est égale à zéro.

l'équation de continuité. Cette équation constitue la forme locale du principe de conservation de la masse et peut prendre l'une des deux formes équivalentes suivantes<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(\mathbf{x},t)}{dt} + \rho(\mathbf{x},t)\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}) &= 0\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Il est intéressant de remarquer que l'équation (3.2.4.a) peut aussi se déduire formellement en exprimant que la masse  $dM = \rho dV$  d'une particule matérielle  $dV$  est constante au cours du temps. En utilisant (3.1.8) pour calculer la dérivée matérielle de cette quantité  $dM$ , il vient en effet<sup>9</sup>

$$\frac{d\rho(\mathbf{x},t)}{dt}dV + \rho(\mathbf{x},t)\nabla \cdot \mathbf{v}dV = 0,$$

dont (3.2.4) découle immédiatement.

Notons aussi que (3.2.4.a) peut aussi s'écrire

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho(\mathbf{x},t)} \frac{d\rho(\mathbf{x},t)}{dt}\tag{3.2.5}$$

Cela permet d'interpréter la divergence de la vitesse comme le taux de décroissance relatif de la densité de la particule matérielle située en  $\mathbf{x}$  (cf. aussi (3.1.8) avec  $dM = \rho dV$ ). On en déduit également qu'un matériau incompressible, défini par le fait que la densité de chaque particule matérielle reste constante au cours du temps, est caractérisé par un champ de vitesse indivergentiel<sup>10</sup>.

Dans ce qui suit, les quantités physiques importantes sont souvent définies comme des densités par *unité de masse*. Pour cette raison, il est intéressant de raffiner un peu le lemme du § 3.1. Nous allons utiliser l'équation de continuité afin d'évaluer la dérivée temporelle de l'intégrale :

$$H(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x},t)h(\mathbf{x},t)dV\tag{3.2.6}$$

où  $h$  désigne la densité massique de la quantité  $H$ .

En utilisant (3.1.9b), il vient

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v}) \right) dV\tag{3.2.7}$$

On en déduit

<sup>8</sup> Ces équations sont évidemment des équations eulériennes. On pourrait aussi transcrire le principe de conservation de la masse (ou les autres lois envisagées dans la suite) dans un contexte lagrangien, mais nous ne le ferons pas ici.

<sup>9</sup> La dérivée partielle de (3.1.8) est évidemment transformée en dérivée matérielle dans le contexte eulérien du raisonnement en cours.

<sup>10</sup> Bien sûr, un champ de vitesse indivergentiel peut aussi se rencontrer dans un fluide compressible !

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_{V(t)} \rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla h) \right) dV + \int_{V(t)} h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV \quad (3.2.8)$$

Vu l'équation de continuité, la parenthèse de la seconde intégrale s'annule. On obtient alors le *Théorème de transport de Reynolds* :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho h dV = \int_{V(t)} \rho \frac{dh}{dt} dV \quad (3.2.9)$$

Formellement, ce résultat peut aussi s'obtenir en dérivant directement sous le signe d'intégration et en notant que, vu la conservation de la masse,  $d / dt(\rho dV) = d / dt(dM) = 0$ .

### 3.3 Conservation de la quantité de mouvement

Le principe de conservation de la quantité de mouvement, ou de l'impulsion, est l'application de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton au système matériel que constitue le milieu continu. Il exprime que le taux de variation de l'impulsion d'un milieu continu dans un repère d'inertie est égal à la somme des forces extérieures<sup>11</sup> qui s'exercent sur ce milieu. L'expression de ce principe en mécanique des milieux continus requiert l'introduction d'un nouveau concept de force qui n'existe pas lorsque l'on envisage des systèmes (discrets) de points matériels. Dans un milieu continu, les *forces de surface*, ou *forces de contact*, permettent de rendre compte des interactions qui existent, par le fait de leur contact, entre deux portions contiguës de matière. Ces forces décrivent les interactions des particules matérielles voisines au travers de leur surface commune. Ce concept est purement macroscopique et sa nécessité provient de l'hypothèse de continuité.

#### FORCES AGISSANT SUR UN MILIEU CONTINU

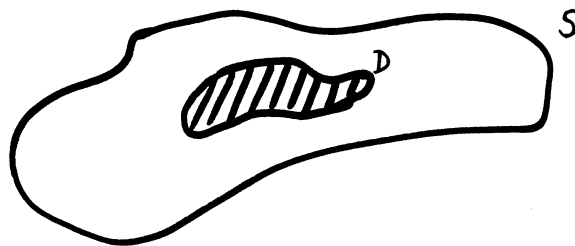


Fig. 3.2

Considérons une portion  $D$  d'un milieu continu  $S$  et essayons de décrire les forces extérieures qui s'appliquent sur cette partie du système. On peut séparer les efforts extérieurs appliqués à  $D$  en deux catégories. Il y a, d'une part, les forces exercées à distance par les systèmes se trouvant en dehors de  $S$  et, d'autre part, les forces exercées sur  $D$  par la matière de  $S$  extérieure à  $D$ . Pour dire les choses autrement, on peut aussi citer Truesdell<sup>12</sup> : « En mécanique des

<sup>11</sup> Comme dans les systèmes de points matériels, les forces internes disparaissent dans la loi de conservation de l'impulsion.

<sup>12</sup> *Introduction à la mécanique des milieux continus*, p. 105, Masson, Paris, 1974.

milieux continus, on introduit 2 sortes de systèmes de forces : les forces appliquées à distance que les corps exercent les uns sur les autres indépendamment du fait qu'ils soient, ou ne soient pas, en contact, et qu'on suppose être en rapport avec les masses de ces corps ; et les forces de contact que les corps contigus exercent les uns sur les autres à travers leurs surfaces de contact, et qu'on suppose dépendre de ces surfaces, être distribuées sur ces surfaces, mais ne point dépendre des masses de ces corps. »

Les forces de la première catégorie ne sont rien d'autre que les forces habituelles de la mécanique du point matériel qui sont exercées sur le milieu continu par le monde extérieur à ce milieu. Au lieu de s'appliquer aux molécules constitutives de la matière, elles sont cependant réparties de manière continue sur le système étudié, conformément à l'hypothèse générale de continuité. Il s'agit donc de forces à longue portée qui 'proviennent' de l'extérieur du milieu continu considéré. Leur effet global sur le milieu continu n'est rien d'autre que la somme de leurs effets sur les molécules constituantes. Ces forces portent le nom de *forces volumiques* car elles s'exercent dans le sein du milieu continu étudié ou aussi *forces massiques* car, vu leur répartition continue, elles sont le plus souvent caractérisées par une densité par unité de masse. L'exemple le plus simple est la force de pesanteur engendrée par le monde extérieur au milieu continu étudié et qui agit sur chaque molécule du système. La force de pesanteur totale agissant sur un volume  $D$  sera ainsi la somme des forces de pesanteur agissant sur les particules microscopiques. Dans le contexte de la mécanique des milieux continus, on écrit cette force sous la forme d'une intégrale sur le volume d'une densité de force. En rapportant cette densité à l'unité de masse plutôt qu'à l'unité de volume, on écrira ainsi :  $\mathbf{F} = \int_D \rho \mathbf{f} dV$ , où  $\mathbf{f}$  est la densité massique de force. Pour la pesanteur, on a ainsi  $\mathbf{f} = \mathbf{g} = -9.81 \text{ms}^{-2} \mathbf{e}_z$ . Les forces électromagnétiques qui sont engendrées par un champ créé à l'extérieur du milieu continu étudié et qui s'appliquent à un fluide porteur de charge électrique constituent un autre exemple de forces de volume. On peut encore éventuellement citer les forces fictives d'inertie qui, dans des repères non inertiels, sont à ranger au rang des forces de volume.

La notion de force de surface, exercée sur  $D$  par la partie de  $S$  extérieure à  $D$  est plus difficile à cerner, mais elle est essentielle dans l'étude des milieux continus. *Les forces de surface*, ou *forces surfaciques*, sont des forces entre particules matérielles<sup>13</sup> contiguës dans un milieu continu. Elles sont introduites pour décrire le « contact » de deux particules matérielles, pour décrire les interactions qui résultent du fait que ces particules « se touchent » au sein du milieu continu. En effet, si l'on sépare par la pensée un milieu continu en deux parties au moyen d'une surface géométrique, il paraît assez naturel de penser que des forces s'exercent au travers de cette surface. Dans le cas d'un fluide au repos par exemple, il s'agira essentiellement des forces de pression. Il paraît naturel également d'imaginer que ces forces augmentent linéairement avec la surface au travers de laquelle elles s'exercent. En fait, l'hypothèse sans doute la plus importante de la mécanique des milieux continus consiste à

<sup>13</sup> Ces forces de surface s'exercent de manière générale entre deux « portions de matière » voisines que l'on découpe par la pensée dans un milieu continu. Elles peuvent s'exercer aussi entre deux milieux continus distincts en contact réel le long d'une frontière commune.

supposer l'existence d'une densité surfacique de force dont l'intégrale sur la surface donne la force de contact totale s'exerçant au travers de cette surface. Cette hypothèse, que nous étudierons plus en détail dans la suite, porte le nom de « Postulat de Cauchy », ou « Principe des tensions d'Euler-Cauchy<sup>14</sup> ».

Il est intéressant de fournir quelques justifications microscopiques à ce postulat de Cauchy. Les forces de surface trouvent leur origine dans les interactions microscopiques entre les molécules constitutives du milieu continu. A la différence des forces extérieures volumiques, les forces intermoléculaires<sup>15</sup> sont des forces à très courte portée (les forces de Lennard-Jones tendent très rapidement vers zéro lorsque la distance entre deux molécules augmente) et leur effet ne se fait sentir qu'à une distance très faible de la surface séparant une portion  $D$  du milieu continu de son complémentaire. Ainsi les forces internes qui s'exercent entre 2 particules matérielles contiguës d'un milieu continu ne sont sensibles que dans le voisinage immédiat de la frontière commune à ces 2 particules. Du point de vue de la mécanique des milieux continus, il est donc raisonnable de schématiser les actions des forces internes d'origine moléculaire en introduisant une densité surfacique de force dont l'intégrale sur la surface séparant 2 portions de matière est égale à la force totale d'interaction entre ces 2 parties du milieu continu. Notons encore que cette interprétation, tout à fait acceptable dans le cas des solides, doit être un peu raffinée dans le cas des fluides. On sait en effet que les constituants microscopiques peuvent migrer d'une particule matérielle à l'autre dans le cas des gaz ou aussi éventuellement dans le cas des liquides. A ces transferts de molécules entre particules matérielles correspondent évidemment des transferts d'impulsion, qui, du point de vue macroscopique, doivent être considérés comme des forces d'interaction entre particules matérielles voisines. Il paraît cependant raisonnable de penser que ces transferts d'impulsion par les migrations des molécules sont eux aussi fonctions directes de la surface des particules matérielles et peuvent donc être décrits d'un point de vue macroscopique par des densités surfaciques de force.

## FORCES SURFACIQUES ET TENSEUR DES TENSIONS

---

### 1 LE VECTEUR DES TENSIONS : POSTULAT DE CAUCHY

Considérons un volume  $V$  d'un milieu continu, de surface extérieure  $S$ . Notons  $x$  un point de cette surface. La densité surfacique de force en ce point, que l'on appelle aussi vecteur des tensions, ou vecteur des contraintes, peut être définie comme la limite de la force moyenne exercée sur une portion  $\Delta S$  de la surface  $S$  lorsque ce  $\Delta S$  devient de plus en plus petit au voisinage du point  $x$ . On peut cependant comprendre aisément que cette définition doit être précisée de manière à tenir compte du fait que l'on peut définir une infinité de volume  $V$  dont la surface  $S$  passe par un point  $x$  (voir Figures ci-dessous). Ainsi le vecteur des tensions  $\mathbf{t}$  va

<sup>14</sup> Ces notions de tensions apparaissent de manière mathématique précise dans les travaux de Cauchy dans les années 1820. (Les études préliminaires d'Euler sont antérieures (1750)).

<sup>15</sup> Les forces de nature gravifique qui s'exercent entre les molécules d'un milieu continu sont plutôt des forces volumiques. Elles sont cependant tout à fait négligeables (et donc négligées) à côté des forces intermoléculaires. Pour 2 atomes d'hélium situés à une distance de  $4 \times 10^{-10}$  m, les forces intermoléculaires sont de l'ordre de  $6 \times 10^{-13}$  N. Les forces gravifiques sont quant à elles de l'ordre de  $7 \times 10^{-42}$  N. Le rapport des deux forces est de l'ordre de  $10^{29}$  !

devoir dépendre d'une manière ou d'une autre de la surface  $S$  qui permet de le définir. L'hypothèse que l'on fait consiste à admettre que le vecteur des tensions  $\mathbf{t}$  dépend de la surface  $S$  uniquement par l'intermédiaire de son vecteur normal  $\mathbf{n}$ , dont la direction est choisie, conformément à l'usage, pour pointer vers l'extérieur du volume  $V$ . Ainsi, un seul et même vecteur  $\mathbf{t}$  se rapportera aux surfaces  $S, S', S''$  de la Fig. de gauche ci-dessous (comme ces surfaces sont tangentes, leurs éléments de surface  $dS$  en  $Q$  sont confondus). En revanche, deux vecteurs  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  doivent être introduits dans le cas de la Fig. de droite. On écrit donc :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) \quad (3.3.1)$$

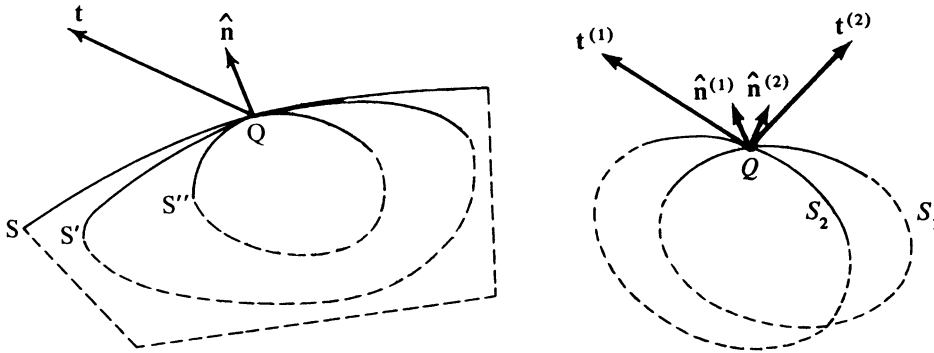


Fig. 3.3

Finalement, le Postulat de Cauchy consiste à supposer l'existence de la limite suivante, définissant, à l'instant  $t$ , le vecteur des tensions  $\mathbf{t}$  en le point  $\mathbf{x}$  et pour une surface de normale  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S_n} \quad (3.3.2)$$

Dans cette relation,  $\Delta \mathbf{F}$  désigne la force qui s'exerce sur une portion de surface  $\Delta S_n$  contenant le point  $\mathbf{x}$  et de normale extérieure unitaire  $\mathbf{n}$ .

Il importe à ce stade de rappeler que, par définition,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$  désigne la densité de force exercée par la matière qui se trouve du côté vers lequel  $\mathbf{n}$  pointe sur la matière située du côté dont  $\mathbf{n}$  provient. Lorsqu'il pointe vers l'extérieur, le vecteur  $\mathbf{t}$  représente donc une tension, ou une traction, exercée par l'extérieur sur l'intérieur. En revanche, le milieu continu est comprimé si le vecteur  $\mathbf{t}$  pointe vers l'intérieur.

La troisième loi de Newton permet ensuite de préciser quelque peu la dépendance de  $\mathbf{t}$  par rapport au vecteur normal  $\mathbf{n}$ . En effet, vu le Principe de l'action et de la réaction, la force exercée par l'intérieur sur l'extérieur est égale à l'opposé de la force exercée sur l'intérieur par l'extérieur. On doit donc avoir :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) \quad (3.3.3)$$

## 2 LE TENSEUR DES TENSIONS

Au vu de ce qui précède, on pourrait croire qu'il est nécessaire de connaître le vecteur  $\mathbf{t}$  pour tous les vecteurs  $\mathbf{n}$  possibles si l'on désire caractériser complètement l'état de

tension en un point matériel donné à un instant donné. L'argument qui suit, appelé « argument du tétraèdre de Cauchy », montre qu'en fait, il suffit de connaître le vecteur  $\mathbf{t}$  correspondant à 3 plans perpendiculaires pour décrire complètement l'état de tension. Nous allons voir qu'en fait le vecteur des tensions est donné par le résultat d'une application linéaire définie sur les vecteurs  $\mathbf{n}$ . Cette application linéaire est un tenseur d'ordre 2 qui est souvent noté  $\boldsymbol{\sigma}$  et qui porte le nom<sup>16</sup> de « tenseur des tensions ». L'introduction de ce tenseur se fait en écrivant la loi du mouvement (2<sup>ème</sup> loi de Newton) correspondant à une particule matérielle prenant la forme d'un tétraèdre infinitésimal.

Considérons une particule matérielle matérialisée par le petit tétraèdre de la Fig. de gauche ci-dessous. Les 3 surfaces élémentaires  $\Delta S_i$  de cette figure ont des aires données par

$$\Delta S_i = \Delta S n_i \quad (3.3.4)$$

où  $n_i$  sont les composantes du vecteur normal  $\mathbf{n}$  (on a par ex.  $n_1 = \cos(\text{AON})$ ).

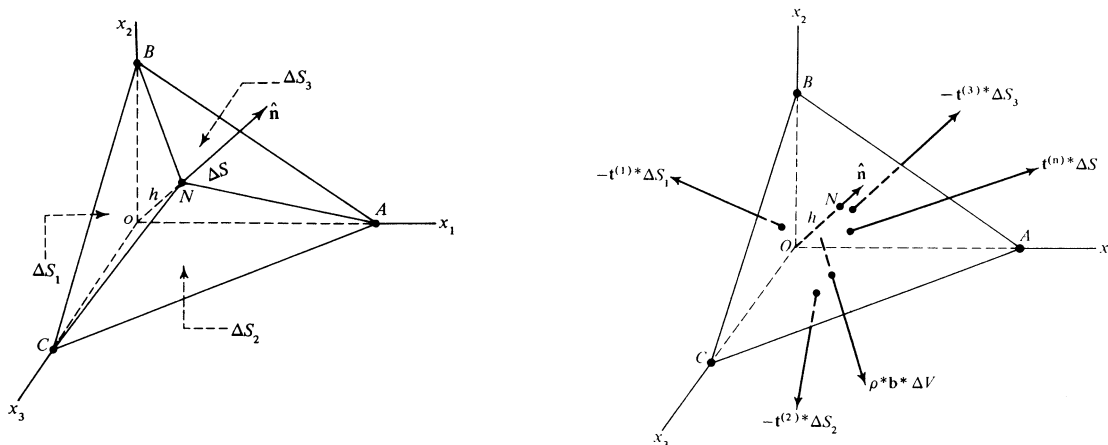


Fig. 3.4

Ecrivons l'équation de mouvement de ce tétraèdre en faisant tendre ses dimensions vers 0. Les forces de volume, ainsi que l'inertie, sont proportionnelles à  $\Delta V$  alors que les forces de surface sont proportionnelles aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent. En écrivant l'équation de mouvement à l'ordre le plus bas en les dimensions linéaires du tétraèdre, on obtient :

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{n})\Delta S + \mathbf{t}^*(-\mathbf{e}_i)\Delta S_i = 0 \quad (3.3.5)$$

où les \* désignent les valeurs moyennes prises sur les surfaces infinitésimales. A la limite, on a donc :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_j)n_j \quad (3.3.6)$$

Le vecteur des tensions se rapportant à une normale  $\mathbf{n}$  quelconque s'exprime donc comme une combinaison linéaire des vecteurs des tensions se rapportant aux 3 plans de coordonnées.

<sup>16</sup> Le mot « tenseur » trouve précisément son origine dans ce tenseur des tensions !

L'équation vectorielle (3.3.6) définit une application linéaire sur les vecteurs normaux unitaires que l'on appelle le tenseur des tensions. Sous forme de composantes, on peut également écrire

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{n}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{e}_j)n_j = \sigma_{ji}n_j \quad (3.3.7)$$

où les  $\sigma_{ji} = \mathbf{t}_i(\mathbf{e}_j)$  sont les composantes du tenseur des tensions  $\sigma$ . Les composantes diagonales du tenseur s'appellent les tensions 'normales', alors que les composantes non diagonales portent le nom de tensions 'tangentiellles' ou de tensions 'de cisaillement'. Sous forme tensorielle, la relation (3.3.7) peut s'écrire :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \sigma \quad (3.3.8)$$

En considérant un cube infinitésimal construit sur les axes de coordonnées (Fig. 3.5), on voit également que les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des tensions peuvent s'interpréter comme les composantes des vecteurs  $\mathbf{t}(\mathbf{e}_k)$  qui définissent les densités surfaciques de force sur les surfaces perpendiculaires aux axes. On a en effet, par exemple,

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{n} = \mathbf{e}_1) = \mathbf{t}_i(\mathbf{e}_j)\delta_{1j} = \sigma_{ji}\delta_{j1} = \sigma_{1i}$$

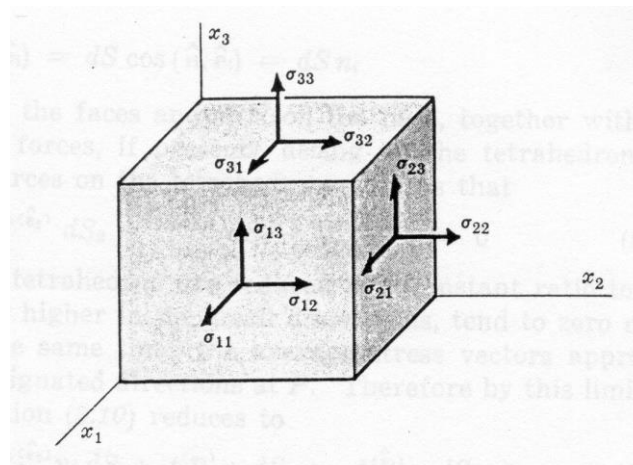


Fig. 3.5

### 3 EXEMPLES REMARQUABLES DE TENSEURS DES CONTRAINTES

#### 3.1 Tenseur des contraintes sphérique

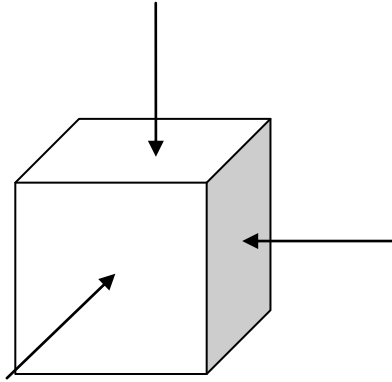
Un tenseur des contraintes sphérique s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\mathbf{I}$$

Suivant que  $p > 0$  ou  $p < 0$ , le milieu continu est dit en compression ou en traction uniforme.

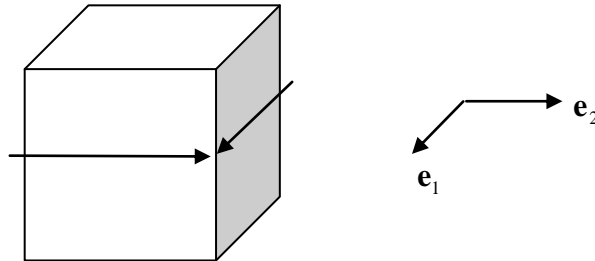
Toutes les directions sont des directions principales de ce tenseur, de valeur propre associée égale à  $-p$ .

Nous verrons que les seules tensions qui peuvent exister dans un fluide au repos sont des tensions sphériques de ce type.



Représentation des tensions sur un cube élémentaire ( $p > 0$ ). Les efforts symétriques sur les faces cachées ne sont pas représentés.

### 3.2 Tenseur de cisaillement simple dans deux directions orthogonales



Représentation des tensions sur un cube élémentaire ( $\sigma > 0$ ). Les efforts symétriques sur les faces cachées ne sont pas représentés

Si  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont deux directions orthogonales, un tenseur de cisaillement simple dans ces 2 directions s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \cdot & \sigma & \cdot \\ \sigma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \sigma(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)$$

Dans le plan de  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , les directions principales de ce tenseur sont, d'une part, le vecteur unitaire porté par la bissectrice des 2 vecteurs et, d'autre part, le vecteur perpendiculaire à ce vecteur unitaire. Dans ces axes principaux, les composantes du tenseur sont :

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\sigma & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

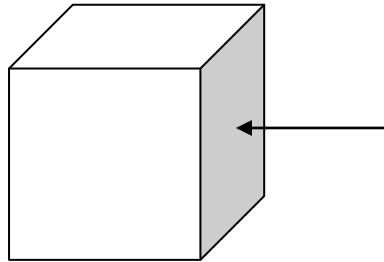
Le milieu est donc en traction suivant l'axe principal bissecteur de  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  et en compression, de même intensité, suivant l'autre axe principal.

### 3.3 Tenseur des contraintes uniaxial

Un tenseur des tensions uniaxial suivant  $\mathbf{e}_1$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \sigma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1$$

Suivant que  $\sigma > 0$  ou  $\sigma < 0$ , on dit que le milieu est en traction ou en compression uniaxiale.



*Représentation des tensions sur un cube élémentaire ( $\sigma < 0$ ). Les efforts symétriques sur les faces cachées ne sont pas représentés.*

---

## EQUATION DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

---

Le principe de conservation de la quantité de mouvement d'un milieu continu s'obtient en généralisant, de manière tout à fait naturelle, la loi de mouvement des systèmes de points matériels. Ce principe postule que, dans un référentiel d'inertie, le taux de variation de la quantité de mouvement d'un milieu continu est égal à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur ce milieu<sup>17</sup>.

Considérons un ensemble de particules matérielles occupant au cours du temps le volume variable  $V(t)$ . Par définition, la quantité de mouvement de la matière contenue dans ce volume s'écrit à chaque instant  $t$  sous la forme :

$$\mathbf{P}(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \quad (3.3.9)$$

Cette quantité de mouvement est obtenue en ajoutant les quantités de mouvement des particules matérielles contenues dans le volume  $V(t)$ . On comprend également que cette quantité n'est rien d'autre que la somme des quantités de mouvement des entités microscopiques (atomes, molécules) constituant le milieu continu.

Vu le théorème de Reynolds, le taux de variation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \quad (3.3.10)$$

---

<sup>17</sup> Les forces internes disparaissent en fait grâce au principe de l'action et de la réaction.

L'ensemble des forces extérieures<sup>18</sup> qui s'appliquent à ce volume peut être scindé en les forces de volume  $\mathbf{F}_V$  et les forces de surface  $\mathbf{F}_S$ . On a donc

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S = \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} dS \quad (3.3.11)$$

où  $\mathbf{b}$  désigne la densité massique des forces de volume et  $\mathbf{t}$  est la densité surfacique des forces de surface. Par définition du tenseur des tensions, les forces de surfaces peuvent se récrire sous les formes suivantes :

$$\int_{S(t)} \mathbf{t} dS = \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.3.12)$$

En égalant le taux de variation de la quantité de mouvement à la somme des forces, il vient :

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.3.13)$$

Cette équation est valable quel que soit le volume  $V$ . On peut donc en déduire une loi d'évolution « locale » pour les champs physiques :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3.14)$$

Cette équation (eulérienne), appelée habituellement « Première loi du mouvement de Cauchy », constitue la loi du mouvement d'un milieu continu.

#### REMARQUE

On a obtenu l'équation de conservation de la quantité de mouvement en considérant un volume fini quelconque. L'équation intégrale (3.3.13) est appelée « forme globale » du Principe de conservation, par opposition à l'équation (3.3.14) que l'on appelle « forme locale ». Il est intéressant de noter que la forme locale peut aussi être obtenue directement en appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement à une particule matérielle infinitésimale. Il suffit en effet d'écrire l'équation de mouvement d'un parallélépipède infinitésimal parallèle aux axes de coordonnées et de côtés  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Le taux de variation de l'impulsion s'écrit ( $dV=dx dy dz$ )

$$\frac{d}{dt}(dM \mathbf{v}) = dM \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Les forces volumiques s'exerçant sur la particule matérielle sont égales à  $\rho \mathbf{b} dV$ . L'évaluation des forces surfaciques est un peu plus délicate. Considérons tout d'abord les 2 faces perpendiculaires à l'axe  $x$ . Les forces de surface sur ces faces s'écrivent :

$$-\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dy dz + \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} + dx \mathbf{e}_x) dy dz = \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} dx dy dz$$

<sup>18</sup> Une force « extérieure » pour une portion  $D$  d'un milieu continu peut évidemment devenir une force « intérieure » pour une portion  $D'$  contenant  $D$ .

Les forces s'exerçant sur les autres plans de coordonnées prennent des formes similaires. Finalement, la somme des forces surfaciques s'écrit

$$\left( \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} dx dy dz = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dx dy dz$$

En regroupant tous les termes, on retrouve donc bien l'équation (3.3.13)<sup>19</sup>.

A partir de l'équation locale, on peut évidemment redériver l'équation globale par intégration sur un volume  $V(t)$  quelconque. Les forces internes à ce volume (qui sont toutes des forces de surface) disparaissent alors grâce au théorème de Gauss pour ne laisser que les forces surfaciques à la surface extérieure du volume  $V(t)$ . Il faut remarquer que la disparition des forces internes est due au principe de l'action et de la réaction qui est contenu dans la définition tensorielle des forces de surface<sup>20</sup>.

### 3.4 Conservation du moment cinétique

Comme un milieu continu possède une extension spatiale, il paraît assez naturel d'écrire une « équation de conservation du moment cinétique » afin de décrire les mouvements de rotation du milieu continu. Avant d'écrire cette équation, il importe cependant de définir clairement la notion de *moment cinétique d'un milieu continu*. Plutôt que d'introduire cette notion de manière axiomatique dans un contexte purement macroscopique, nous allons nous aider de considérations microscopiques qui permettent de visualiser les concepts nécessaires.

La première étape de la définition du moment cinétique d'un milieu continu consiste à généraliser la définition introduite dans l'étude des systèmes de points matériels<sup>21</sup>. Assez naturellement, on définira le moment cinétique d'un milieu continu comme la somme des moments cinétiques des particules matérielles qui le constituent. Il convient donc à présent de définir le moment cinétique d'une particule matérielle. Le plus simple serait de dire que le moment cinétique  $d\mathbf{L}_0$  d'une particule matérielle située en  $\mathbf{x}$  n'est rien d'autre que le moment de sa quantité de mouvement (on prend le moment cinétique par rapport à l'origine du système de référence) :

$$d\mathbf{L}_0 = \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV \quad (3.4.1)$$

Ce point de vue négligerait cependant qu'une particule matérielle macroscopique doit être considérée comme possédant une certaine extension spatiale ainsi que le fait microscopique qu'une telle particule peut être vue comme un système de molécules assimilables à des points matériels. Or on sait que le moment cinétique d'un système de points matériels, qui est la somme des moments cinétiques des différentes particules, peut s'écrire comme la somme du

<sup>19</sup> Lorsque l'on a développé « l'argument du tétraèdre » pour introduire le tenseur des tensions, on a écrit les équations du mouvement à l'ordre 2 en les dimensions linéaires de la particule matérielle, en négligeant les termes d'ordre 3. Pour obtenir directement la forme locale du principe de conservation de l'impulsion, on a écrit l'équation de mouvement d'une particule matérielle infinitésimale à l'ordre 3 en ses dimensions linéaires, étant entendu que l'équation à l'ordre 2 était satisfaite puisqu'on utilise le tenseur des tensions.

<sup>20</sup> Voir (3.3.3) qui est utilisé pour démontrer (3.3.8).

<sup>21</sup> Il importe de bien distinguer « points matériels » et « particules matérielles » !

moment cinétique du centre de masse et du moment cinétique de ce système dans son mouvement autour du centre de masse. Il s'agit en fait du premier théorème de Koenig :  $\mathbf{L}_O = \mathbf{OC} \times m\mathbf{v}_C + \mathbf{L}^*$ , où O et C désignent l'origine du système d'axes et le centre de masse du système de points matériels ;  $m\mathbf{v}_C$  représente l'impulsion du système et  $\mathbf{L}^*$  désigne le moment cinétique du système de points matériels dans son mouvement autour du centre de masse. En assimilant la vitesse  $\mathbf{v}$  avec la vitesse du centre de masse des molécules constituant la particule matérielle, on voit donc que l'expression (3.4.1) néglige le moment cinétique engendré par les mouvements des molécules autour du « centre » de la particule matérielle. Pour ces raisons, il paraît raisonnable d'ajouter une composante de moment cinétique propre (ou intrinsèque) à l'expression donnant le moment cinétique d'une particule matérielle<sup>22</sup>. On définit donc le moment cinétique de la particule matérielle qui se trouve en  $\mathbf{x}$  par l'expression :

$$d\mathbf{L}_O = \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV + \rho \mathbf{l}_O dV \quad (3.4.2)$$

où  $\mathbf{l}_O$  est la densité massique de moment cinétique intrinsèque. Cette quantité constitue une nouvelle variable d'état servant à décrire le milieu continu.

Essayons à présent de déterminer les différents effets pouvant donner lieu à des variations du moment cinétique d'un milieu continu. Il est clair tout d'abord que les moments des forces extérieures<sup>23</sup> de volume et de surface vont influencer sur le moment cinétique. L'exemple suivant montre cependant que ces termes ne suffisent pas et que des effets supplémentaires doivent en général être pris en compte. Envisageons un milieu continu polarisé que l'on plonge dans un champ électrique. D'un point de vue microscopique, on conçoit que chaque molécule constitutive d'une particule matérielle va subir un couple engendré par deux forces opposées agissant en les centres de charge positive et négative de la molécule. Du point de vue de la particule matérielle, les couples correspondant aux différentes molécules vont s'ajouter et donner lieu à un couple macroscopique volumique. Ce couple résultant ne peut cependant pas être vu comme la somme des moments de deux forces *macroscopiques* opposées qui agiraient sur la particule matérielle (car cette particule *macroscopique* n'est porteuse d'aucune charge *macroscopique*) et c'est la raison pour laquelle on parle de couple « pur ». De tels couples volumiques purs apparaissent également lorsque de la matière magnétisée est plongée dans un champ magnétique ainsi que dans certains modèles de fluides polymériques (non-newtoniens). On peut aussi comprendre que des couples purs de surface peuvent apparaître comme par exemple lorsque les particules microscopiques qui constituent la matière interagissent par l'intermédiaire de forces qui ne sont pas dirigées suivant l'axe reliant les particules en interaction.

En fin de compte, le principe de conservation du moment cinétique affirme que le taux de variation du moment cinétique d'une portion quelconque  $V(t)$  de matière est égal à la

<sup>22</sup> Ce type d'ajout n'est pas nécessaire dans le cas de l'impulsion. En effet, l'impulsion d'un milieu continu est la somme des impulsions des particules matérielles constituantes, comme l'impulsion d'une particule matérielle est la somme des impulsions de ses constituants microscopiques.

<sup>23</sup> Les moments des forces intérieures disparaissent à cause du principe de l'action et de la réaction.

somme des moments des forces extérieures augmentée des couples extérieurs agissant sur cette portion de matière. On a donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{l}_0) dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{t} + \mathbf{c}_s) dS + \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{c}_v) dV \quad (3.4.3)$$

où  $\mathbf{c}_v$  et  $\mathbf{c}_s$  désignent les densités des couples purs volumiques et surfaciques. Cette équation est la forme globale de l'équation générale de conservation du moment cinétique.

Nous allons à présent restreindre un peu le domaine d'application de cette équation en nous limitant à ce que l'on appelle traditionnellement les « milieux non polaires », qui constituent des modèles appropriés dans de très nombreuses situations physiques que l'on rencontre en étudiant les milieux continus. Les « milieux non polaires » sont caractérisés par les faits suivants. Tout d'abord, les moments cinétiques propres des particules matérielles sont négligeables ( $\mathbf{l}_0 \approx 0$ ). De plus, on suppose que les couples en volume et en surface  $\mathbf{c}_v$  et  $\mathbf{c}_s$  n'existent pas. Dans ces conditions, l'équation (3.4.3) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dS + \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) dV \quad (3.4.4)$$

On remarque directement que cette équation d'évolution ne fait pas intervenir de nouvelle variable d'état, à la différence de l'équation générale (3.4.3) qui décrivait l'évolution temporelle des moments cinétiques internes. Cette équation va devoir être comparée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, avec laquelle elle doit évidemment être compatible. Nous allons voir qu'en fait la condition de compatibilité entre ces deux équations est une condition sur le tenseur des contraintes. On peut évidemment s'y attendre puisqu'en l'absence de moment cinétique interne, la description de la « rotation » des particules matérielles doit se réduire à une équation exprimant l'équilibre en rotation des forces en présence. On a tout d'abord :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}) dV \quad (3.4.5)$$

En utilisant la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.3.14), l'équation précédente peut se récrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})) dV \quad (3.4.6)$$

En comparant avec (3.4.4), il vient :

$$\int_{V(t)} (\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})) dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dS + \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) dV \quad (3.4.7)$$

En ne considérant pas le terme commun aux 2 membres de cette équation, on obtient une condition de compatibilité que doivent vérifier les tensions de surface :

$$\int_{V(t)} \mathbf{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dS \quad (3.4.8)$$

Cette condition peut être rendue un peu plus explicite. Le plus simple est de passer aux composantes des différentes quantités. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{lk} dV &= \int_{S(t)} \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS \\
&= \int_{S(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS \\
&= \int_{V(t)} \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk}) dV \\
&= \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \partial_l x_j \sigma_{lk} dV + \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{lk} dV \\
&= \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV + \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{lk} dV
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

On déduit donc

$$\int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \tag{3.4.10}$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit  $V(t)$ , il vient, localement :

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \tag{3.4.11}$$

ou encore,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \forall i, j \tag{3.4.12}$$

La conservation du moment cinétique dans le cas des milieux non polaires est donc équivalente à la symétrie du tenseur des tensions :

$$\sigma = \sigma^T. \tag{3.4.13}$$

Cette relation constitue la « Deuxième loi du mouvement de Cauchy » dans le cas des milieux non polaires.

### 3.5 Conservation de l'énergie

La loi de conservation de l'énergie, ou premier principe de la thermodynamique, affirme l'équivalence de toutes les formes d'énergie. Pendant l'évolution d'un système continu, les différentes énergies en présence peuvent se transformer les unes en les autres pour autant que l'énergie totale, qui est la somme des différentes énergies, soit conservée.

Dans un système de référence donné, on peut évidemment associer une énergie cinétique à tout milieu continu. Par définition, l'énergie cinétique d'un milieu continu est la somme des énergies cinétiques associées à ses particules matérielles. On a donc :

$$E_c = \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 dV \tag{3.5.1}$$

où  $V(t)$  est un volume « matériel », c'est-à-dire un volume renfermant toujours un même ensemble de particules matérielles.

Outre cette énergie due au mouvement, l'expérience a montré qu'un autre type d'énergie, appelée *énergie interne*, devait être associée à tout milieu macroscopique. L'énergie interne associée à un volume  $V(t)$  est souvent notée  $U$  et l'on désigne par  $u$  la densité massique de cette quantité. On a donc :

$$U = \int_{V(t)} \rho u dV \quad (3.5.2)$$

Afin d'exprimer le principe de conservation de l'énergie, il faut également décrire les échanges d'énergie entre le milieu continu  $V(t)$  étudié et le monde qui l'entoure. Il est clair tout d'abord que le travail des forces extérieures peut engendrer des modifications de l'énergie du milieu continu. Pour le volume  $V(t)$ , la puissance des forces extérieures peut s'écrire

$$P_V + P_S = \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS \quad (3.5.3)$$

où l'on a séparé la puissance des forces de volume et la puissance des forces de surface<sup>24</sup>. En plus de ces échanges d'énergie par l'intermédiaire des forces extérieures, l'expérience a montré que les transferts d'énergie pouvaient aussi se faire au travers de *transferts de chaleur*, qui, à l'image de la puissance des forces, se répartissent en transferts en surface et transferts dans le volume. La quantité de chaleur  $\dot{Q}$  fournie par unité de temps par le monde extérieur est donc exprimée sous la forme de la somme d'un terme de surface<sup>25</sup> et d'un terme de volume :

$$\dot{Q} = - \int_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \rho r dV \quad (3.5.4)$$

Le vecteur  $\mathbf{q}$  est le vecteur *flux de chaleur* qui traduit les apports calorifiques en surface par le phénomène de *conduction thermique*. La source massique de chaleur  $r$  rend compte des apports<sup>26</sup> de chaleur directement dans le sein du milieu continu. Le chauffage radiatif dans la masse, qui constitue le principe de fonctionnement des fours à micro-ondes, est un exemple de phénomène donnant lieu à ce type d'apport volumique de chaleur. De même, l'effet Joule résultant du passage d'un courant électrique ou l'existence de réactions chimiques au sein d'un milieu continu fournissent d'autres exemples de sources de chaleur volumique.

Le premier principe de la thermodynamique, ou principe de conservation de l'énergie, permet alors d'affirmer que le taux de variation de l'énergie totale d'un milieu continu, c'est-à-dire le taux de variation de la somme de son énergie cinétique et de son énergie interne, est égal à la puissance des forces extérieures appliquées au milieu étudié augmentée de la quantité de chaleur reçue par unité de temps. Mathématiquement, on a :

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (E_c + U) = P_V + P_S + \dot{Q} \quad (3.5.5)$$

<sup>24</sup> Si l'on considère des milieux polaires, on doit également tenir compte de transferts d'énergie mécanique par les couples en volume et en surface.

<sup>25</sup> Le fait que les échanges en surface peuvent s'écrire sous la forme du 1<sup>er</sup> terme de (3.5.4), au moyen d'un vecteur  $\mathbf{q}$  flux de chaleur, peut se démontrer par un raisonnement similaire à l'argument du tétraèdre développé dans le paragraphe 3.3 (Voir, par exemple, Germain et Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*.)

<sup>26</sup> Ou des pertes bien sûr.

En explicitant les différentes notations, il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + u \right) dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \rho r dV \quad (3.5.6)$$

Il est ensuite intéressant d'utiliser l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.3.14) pour simplifier certains termes dans l'équation ci-dessus. En multipliant scalairement l'équation de conservation de la quantité de mouvement par la vitesse, il vient :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho \frac{d\|\mathbf{v}\|^2}{dt} = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \quad (3.5.7)$$

d'où, en intégrant sur le volume matériel  $V(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_c &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 dV \\ &= \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho \frac{d\|\mathbf{v}\|^2}{dt} dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{V(t)} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dV - \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{v}) dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} dV \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

où l'on a remplacé  $\boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{v})$  par  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V}$  en tenant compte de la symétrie du tenseur des tensions dans les milieux non polaires. Ce calcul montre que la puissance des forces de surface donne lieu à deux contributions dans la dernière ligne ci-dessus. Le terme  $\int_{S(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS$  représente la puissance des forces de surface extérieures alors que le terme<sup>27</sup>  $-\int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} dV$  représente la puissance des forces surfaciques internes au milieu continu.

<sup>27</sup> Pour interpréter ce terme comme la puissance des forces surfaciques intérieures, il suffit de remarquer que les deux autres termes du membre de droite de (3.5.8) représentent la puissance des forces extérieures volumiques et la puissance des forces extérieures surfaciques. Il faut donc bien que le dernier terme représente la puissance des forces intérieures de surface (toutes les forces intérieures sont des forces de surface).

On peut aussi évaluer explicitement cette puissance des forces intérieures de surface. Envisageons une particule  $P$  (un élément de volume  $dV = dx dy dz$ ) située en  $(x, y, z)$ . Considérons ensuite sa voisine  $P + dP_x$  située en  $(x + dx, y, z)$ . A travers la surface qui leur est commune, ces particules exercent l'une sur l'autre des forces de surface qui sont opposées. La puissance de ces deux forces se calcule comme suit. La force que la particule  $P + dP_x$  exerce sur  $P$  s'écrit, avec des notations faciles à interpréter :

$$\mathbf{t} dy dz = \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma} dy dz .$$

La particule  $P$  étant animée d'une vitesse  $\mathbf{v}(x, y, z)$ , la puissance que cette force développe est donnée par :

$$(\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}(x, y, z) dy dz .$$

De même, la puissance développée par la force que  $P$  exerce sur  $P + dP_x$  s'écrit :

$$(-\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}(x + dx, y, z) dy dz .$$

La puissance totale développée par les forces de surface entre les deux particules vaut donc

On a donc

$$\frac{d}{dt} E_c = -\int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} dV + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS \quad (3.5.9)$$

En soustrayant cette équation de l'équation (3.5.6), on obtient une équation pour l'énergie interne :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u dV = - \int_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \rho r dV + \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} dV \quad (3.5.10)$$

Les équations qui précèdent peuvent évidemment être écrites sous forme locale. Pour l'énergie totale, il vient, en partant de (3.5.6) :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + u \right) = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (3.5.11)$$

Pour l'énergie cinétique, on obtient à partir de (3.5.7)

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\|\mathbf{v}\|^2}{dt} = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \quad (3.5.12)$$

Enfin, l'équation pour l'énergie interne  $u$  se déduit de (3.5.10)

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} \quad (3.5.13)$$

Pour terminer ce paragraphe, il est intéressant de rappeler l'interprétation microscopique de la notion d'énergie interne. Cette énergie peut être considérée comme la somme de 2 contributions de natures complètement différentes. La première composante de l'énergie interne est une énergie de nature mécanique qui généralise à un milieu continu la notion d'énergie d'interaction des points matériels formant un système (cf. l'étude des systèmes de points matériels lorsque les forces internes dérivent d'un potentiel<sup>28</sup>). Cette énergie s'interprète comme la somme des énergies d'interactions des différentes molécules qui interagissent par l'intermédiaire de forces conservatives du type Lennard-Jones. Il s'agit

$$(\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{v}(x, y, z) - \mathbf{v}(x + dx, y, z)) dy dz = (\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left( -(\nabla \mathbf{v})^T \cdot (dx \mathbf{e}_x) \right) dy dz = -\sigma_{1k} \partial_1 v_k dx dy dz.$$

En envisageant les deux autres particules voisines de  $P$  et situées respectivement en  $(x, y + dy, z)$  et  $(x, y, z + dz)$ , et en ajoutant les puissances développées par les forces surfaciques entre  $P$  et ces deux voisines à l'expression ci-dessus, on obtient la puissance totale développée par les forces surfaciques s'exerçant entre  $P$  et ses trois voisines situées le long des axes du côté des coordonnées croissantes (en supposant  $dx, dy, dz$  positifs) :

$$\mathcal{P}_{P+} = -\sigma_{ik} \partial_i v_k dx dy dz = -\sigma_{ik} V_{ik} dx dy dz = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} dV,$$

vu la symétrie du tenseur des tensions. Finalement, en considérant toutes les particules  $P$  constitutives d'une portion  $V(t)$  d'un milieu continu, et en additionnant toutes les contributions, la puissance totale des forces intérieures peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_V = - \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} dV.$$

<sup>28</sup> Si on ne tenait pas compte des effets thermiques, le postulat d'existence de l'énergie interne serait équivalent à une hypothèse de forces internes conservatives. Dans ces conditions, l'énergie interne ne serait rien d'autre que l'énergie potentielle des forces interparticulaires.

donc d'une sorte d'énergie élastique que tout matériau peut stocker lorsque ses molécules sont rapprochées les unes des autres. Cette énergie est parfaitement semblable à l'énergie potentielle stockée dans les « ressorts idéaux » que l'on rencontre dans les cours de mécanique du point matériel.

La deuxième composante de l'énergie interne rend compte des phénomènes d'agitation moléculaire. En effet, on comprend aisément que la notion d'énergie cinétique macroscopique introduite en (3.5.1) néglige une partie de l'énergie cinétique microscopique. La densité d'énergie cinétique  $1/2\rho\mathbf{v}^2 dV$  n'est évidemment pas la somme des énergies cinétiques de toutes les molécules<sup>29</sup>. Une autre façon de voir les choses est de rappeler le 2<sup>ème</sup> Théorème de Koenig qui affirme que l'énergie cinétique d'un système de point matériel est constituée de l'énergie cinétique de son centre de masse auquel il faut ajouter l'énergie cinétique des différentes particules dans leur mouvement autour de ce centre de masse :  $T = 1/2m\mathbf{v}_c^2 + T^*$ , avec des notations connues. Ainsi, en définissant l'énergie cinétique d'une particule matérielle d'un milieu continu par  $1/2\rho\mathbf{v}^2 dV$ , on néglige complètement l'énergie cinétique des molécules qui se déplacent « à l'intérieur » de la particule matérielle. Cette seconde composante de l'énergie interne est donc l'énergie cinétique des particules microscopiques correspondant à leurs mouvements incessants par rapport aux particules matérielles qu'elles constituent et qui se déplacent avec les vitesses macroscopiques  $\mathbf{v}$ . Elle doit être introduite pour récupérer au niveau macroscopique cette énergie cinétique microscopique négligée dans la notion d'énergie cinétique définie par (3.5.1).

Ajoutons encore que la distinction entre ces 2 composantes de l'énergie interne ne peut se faire qu'en considérant le point de vue microscopique. D'un point de vue macroscopique, seule l'énergie interne totale, somme des deux composantes, est une grandeur physique pertinente.

### 3.6 *Forme générale des équations d'évolution : les équations de bilan*

Les équations d'évolution traduisant les divers principes considérés jusqu'à présent peuvent se récrire sous la forme générale *d'équations de bilan*. Une équation de bilan décrit comment varie une quantité physique en fonction des « apports » et des « pertes » et elle consiste en l'expression de l'égalité entre le taux de variation de la quantité en question et la somme des diverses « causes » physiques de variation de cette quantité. Nous allons voir que les équations de bilan peuvent être écrites sous forme globale et sous forme locale. En outre, elles peuvent être écrites pour des *portions de matières données* ou pour des *volumes de l'espace physique donnés*.

Dans le contexte de la thermomécanique des milieux continus, les quantités physiques pertinentes sont le plus souvent définies pour une *portion de matière donnée*. Notons alors  $f$  et  $h$  les densités volumique et massique des quantités

---

<sup>29</sup> Comme l'impulsion macroscopique  $\rho\mathbf{v}dV$  était la somme des impulsions des différentes molécules.

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t) = \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \\ H(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}, t) dV \end{array} \right.$$

respectivement, où  $V(t)$  désigne un volume matériel. Ces deux quantités  $F$  et  $H$  se rapportent donc à une portion de matière donnée et les *équations de bilan* qui décrivent leurs évolutions peuvent s'écrire sous les formes générales :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_f(\mathbf{x}, t) dS + \int_{V(t)} \sigma_f(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.6.1a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho h(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_h(\mathbf{x}, t) dS + \int_{V(t)} \sigma_h(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.6.1b)$$

Les membres de droite des équations (3.6.1) décrivent les « causes » physiques des variations de  $F$  ou  $H$ . Ces causes s'écrivent sous la forme d'une somme de deux termes. Le premier terme consiste en une intégrale sur la surface<sup>30</sup> extérieure de la portion de matière étudiée. Il rend compte de ce qui est perdu au travers de cette surface<sup>31</sup> et décrit donc les échanges, ou les transferts, entre le monde extérieur et la portion de milieu continu considérée au travers de sa surface. Comme on le comprend en examinant les exemples des équations de conservation présentées plus haut (voir aussi tableau ci-dessous), les transferts surfaciques en question proviennent en fin de compte de l'hypothèse de continuité et ils trouvent leur origine fondamentale dans des phénomènes moléculaires, d'où l'appellation de *flux moléculaires* que l'on donne habituellement aux quantités  $\mathbf{J}_f$  et  $\mathbf{J}_h$ .

L'intégrale de volume des seconds membres rend compte d'un apport en volume des quantités  $f$  ou  $h$ . On parle de *terme de production* et les quantités  $\sigma_f$  et  $\sigma_h$  sont les densités volumiques du taux de production, appelées souvent aussi taux de production locale, ou simplement sources (volumiques) des quantités considérées. Les exemples des équations de conservation montrent que ces termes peuvent provenir de phénomènes qui se passent réellement au sein du milieu continu mais également décrire des apports en provenance du monde extérieur au milieu continu (voir tableau ci-dessous).

Les équations globales (3.6.1) sont supposées valables pour tout volume  $V(t)$  et permettent de déduire des équations locales pour les densités. En utilisant le théorème de Gauss et le lemme 1, il vient immédiatement

$$\frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \sigma_f \quad (3.6.2a)$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_h + \sigma_h \quad (3.6.2b)$$

<sup>30</sup> Les grandeurs  $f$  ou  $h$  sont tensorielles d'ordre quelconque ;  $\sigma_f$  et  $\sigma_h$  sont des tenseurs du même ordre que  $f$  et  $h$  respectivement alors que  $\mathbf{J}_f$  et  $\mathbf{J}_h$  sont des tenseurs dont l'ordre est égal à celui de  $f$  ou  $h$  augmenté d'une unité.

<sup>31</sup> Lorsque  $\mathbf{J}_f$  pointe vers l'intérieur du volume matériel étudié, il tend à augmenter  $F$ .

où  $d/dt$  représente la dérivée matérielle. Dans ces équations écrites sous forme locale, il est important de bien remarquer les rôles joués par les termes de source et de flux.

En développant les dérivées matérielles, on peut aussi récrire ces équations sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{J}_f + \mathbf{v}f) + \sigma_f \quad (3.6.3a)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{J}_h + \mathbf{v}\rho h) + \sigma_h \quad (3.6.3b)$$

Il est alors intéressant d'intégrer ces relations sur un volume **fixé**  $V$  de l'espace géométrique. On déduit ainsi les relations :

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{x}, t) dV = - \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}f) dS + \int_V \sigma_f(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.6.4a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}, t) dV = - \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_h(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{v}h) dS + \int_V \sigma_h(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.6.4b)$$

Il importe de bien noter que les quantités sur lesquelles portent les dérivées temporelles des membres de gauche sont définies *pour un volume fixé* de l'espace physique. Pour cette raison, ces équations constituent des équations de bilan (sous forme globale) *pour un volume fixé*  $V$  de l'espace. Les formes locales qui leur correspondent sont bien sûr les équations (3.6.3).

Ces équations de bilan pour un volume physique donné font apparaître deux types de flux à la surface de ce volume. Il y a d'une part les flux moléculaires  $\mathbf{J}_f$  ou  $\mathbf{J}_h$  déjà rencontrés, et, d'autre part, les flux « convectifs »  $\mathbf{v}f$  ou  $\mathbf{v}\rho h$  rendant compte du transport par l'écoulement lui-même des quantités  $f$  ou  $h$  au travers de la surface fixe.

Les flux et les sources se rapportant aux équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie interne<sup>32</sup> se déduisent des équations correspondantes et sont donnés dans le tableau résumé donné ci-après. Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement, le terme source est d'origine extérieure. Dans l'équation de l'énergie interne, le premier et le second terme source sont respectivement d'origine extérieure et d'origine intérieure.

Quantité	Flux	Source
$\rho$	0	0
$\rho \mathbf{v}$	$-\sigma$	$\rho \mathbf{b}$
$\rho u$	$\mathbf{q}$	$\rho r + \sigma : \mathbf{V}$

<sup>32</sup> Pour l'équation de conservation de la masse, le flux (moléculaire) et la source sont nuls tous les deux. On en déduit par (3.6.3a) que les variations de densité en un point (fixe) de l'espace géométrique ne peuvent provenir que d'apport de matière transportée par l'écoulement (flux convectif).

### 3.7 Equation de bilan de l'entropie et second principe de la thermodynamique

Si l'on désire placer l'étude des milieux continus dans le cadre théorique de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, il convient d'introduire ici la notion d'entropie ainsi que l'équation décrivant son évolution. Cette équation permet d'exprimer le Second principe de la thermodynamique dans le contexte des milieux continus en évolution.

Nous avons vu que le premier principe de la thermodynamique impose la conservation de l'énergie totale mais qu'il admet que les différents types d'énergies se transforment les uns dans les autres, sans aucune restriction. Or on sait que tous les transferts d'énergie ne sont pas possibles. Ainsi par exemple, on sait que la chaleur ne s'écoule pas spontanément des corps froids vers les corps chauds.

Afin d'imposer que certains transferts d'énergie se font seulement dans une direction bien déterminée, on introduit une nouvelle variable d'état appelée *entropie* dont on va supposer que la « production d'origine intérieure » est toujours positive pendant l'évolution du milieu continu étudié. En fonction d'une densité massique  $s$ , l'entropie  $S$  d'un volume matériel  $V(t)$  s'écrit :

$$S = \int_{V(t)} \rho s dV \quad (3.7.1)$$

Il importe de souligner que cette grandeur  $s$  que l'on vient d'introduire est une variable d'état qui n'est pas indépendante des autres variables d'état. L'entropie  $s$  doit s'écrire sous la forme d'une fonction des autres quantités définissant l'état du système. Cette fonction ne peut cependant pas être explicitée de manière générale pour tous les matériaux. La dépendance de  $s$  par rapport aux autres variables est décrite par ce que l'on appelle une *équation d'état* qui constitue une caractéristique intrinsèque du matériau, permettant de rendre compte de sa nature propre.

L'équation d'évolution de la densité d'entropie  $s$  peut s'écrire sous la forme générale (3.6.2b) :

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma_s \quad (3.7.2)$$

ou, sous forme globale :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) dS + \int_{V(t)} \sigma_s(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.7.3)$$

où  $\mathbf{J}_s$  et  $\sigma_s$  représentent les flux et source d'entropie.

L'entropie d'une portion de matière peut donc varier à la suite d'un échange avec le monde extérieur au travers de sa frontière avec celui-ci. Ce genre de situation se présente par exemple lorsqu'un milieu continu est chauffé par conduction par son voisinage. Ce type de variations est décrit dans l'équation (3.7.2 ou 3.7.3) par la divergence du flux d'entropie  $\mathbf{J}_s$ ,

dont l'expression en termes des variables d'état du système doit évidemment être précisée. Nous le ferons par la suite en généralisant des notions de thermostatique.

D'autre part, l'entropie d'un milieu continu peut aussi varier suite à des apports directs dans le sein du milieu continu, au travers du terme-source  $\sigma_s$ . Il est alors intéressant de séparer en deux contributions cette source d'entropie, selon que l'apport décrit existe ou non lorsque le système est isolé du monde extérieur. On écrira donc

$$\sigma_s = \sigma_s^i + \sigma_s^e \quad (3.7.4)$$

où  $\sigma_s^i$  et  $\sigma_s^e$  désignent la production d'origine interne et la production d'origine externe. Comme le flux d'entropie envisagé ci-dessus, la production en provenance du monde extérieur doit être supposée connue et on l'obtiendra également en généralisant la thermostatique. Par exemple, mentionnons qu'un chauffage radiatif dans la masse donnera lieu à une contribution à  $\sigma_s^e$  (cf. aussi tous les phénomènes donnant lieu à une contribution à  $r$  dans l'équation (3.5.4)). La production d'entropie d'origine intérieure est en revanche indépendante de tout échange avec le milieu extérieur et ne dépend que des phénomènes qui se produisent au sein du milieu continu. Ainsi, par exemple, des flux de chaleur à l'intérieur d'un milieu continu donnent naissance à une production d'origine interne non nulle. Ces processus, qui ne sont pas contrôlés par le monde extérieur, sont donc pris en compte dans l'équation d'évolution de l'entropie par le terme de source d'origine intérieure  $\sigma_s^i$ .

Le second principe de la thermodynamique consiste alors à postuler que ce terme de production intérieure  $\sigma_s^i$  est une quantité toujours positive. Cette hypothèse constitue une généralisation du second principe de la thermostatique ; elle exprime que, parmi les phénomènes qui pourraient se produire **au sein** d'un milieu continu, seuls ceux qui tendent à faire augmenter l'entropie du système seront observables dans des expériences. On a donc

$$\sigma_s^i \geq 0 \quad (3.7.5)$$

c'est-à-dire, en utilisant (3.7.2 et 4),

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - \sigma_s^e \geq 0 \quad (3.7.6)$$

Si on suppose  $\mathbf{J}_s$  et  $\sigma_s^e$  connus ainsi que la fonction  $s(\alpha_i)$  exprimant l'entropie en fonctions des variables d'état  $\alpha_i$  du système, on peut encore récrire la relation précédente sous la forme :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - \sigma_s^e = \rho \sum_i \frac{\partial s}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - \sigma_s^e \geq 0, \quad (3.7.7)$$

où les taux de variation des variables d'état sont donnés par les équations de conservation que nous avons décrites plus haut.

### 3.8 Conditions aux limites

Les équations de la thermomécanique des milieux continus sont des équations aux dérivées partielles qui doivent être assorties de conditions aux limites si l'on désire les résoudre sur des domaines d'extension finie.

L'étude de ces conditions aux limites ne sera pas envisagée de manière théorique détaillée ici mais nous étudierons leur forme précise par la suite pour les différents modèles de matériaux. Soulignons cependant l'importance fondamentale de ces conditions aux limites qui permettent de décrire les nombreux phénomènes physiques d'échange à la surface de séparation de deux milieux continus.

### 3.9 Résumé des équations

#### CONTEXTE ET HYPOTHESES GENERALES

---

- Milieu continu homogène, c'est-à-dire fait d'un seul constituant (pas de phénomènes de diffusion de différents constituants les uns dans les autres, pas de réactions chimiques)
- Milieu non polaire
- Pas d'effets électromagnétiques (si ce n'est d'éventuels phénomènes de chauffage radiatif par des champs électromagnétiques donnés).

#### LES EQUATIONS

---

- CONSERVATION DE LA MASSE

$$(1 \text{ équation}) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2.4)$$

- CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT (1<sup>ERE</sup> LOI DU MOUVEMENT DE CAUCHY)

$$(3 \text{ équations}) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3.14)$$

- CONSERVATION DU MOMENT CINETIQUE (2<sup>EME</sup> LOI DU MOUVEMENT DE CAUCHY)

$$(3 \text{ équations}) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (3.4.13)$$

- CONSERVATION DE L'ENERGIE INTERNE

$$(1 \text{ équation}) \quad \rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} \quad (3.5.13)$$

- BILAN DE L'ENTROPIE

$$(1 \text{ équation}) \quad \rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma_s^e + \sigma_s^i \quad (3.7.2)$$

## LES INCONNUES

---

- $\rho$  (1 INCONNUE)
- $\mathbf{v}$  (3 INCONNUES)
- $\sigma$  (9 INCONNUES)
- $u$  (1 INCONNUE)
- $\mathbf{q}$  (3 INCONNUES)
- $s$  (1 INCONNUE)
- $\mathbf{J}_s$  (3 INCONNUES)
- $\sigma_s^e$  (1 INCONNUE)
- $\sigma_s^i$  (1 INCONNUE)

NB.  $\mathbf{b}$  et  $r$  sont des fonctions de  $\mathbf{x}$  et  $t$  supposées connues.

## CONCLUSION

---

23 inconnues pour 9 équations !

Nécessité d'introduire des équations additionnelles qui décrivent les caractéristiques propres des différents matériaux :

Equations d'état

Equations constitutives

## 4 Equations d'état et équations constitutives

Nous avons vu que les lois de conservation ne permettent pas de résoudre un problème de mécanique (ou thermomécanique) des milieux continus car, pour dire les choses simplement, il y a plus d'inconnues que d'équations. Les équations manquantes sont généralement réparties en 2 catégories : les équations d'état et les équations constitutives. Ces deux types d'équations peuvent être différenciés de la manière suivante. On peut dire que les équations d'état sont utilisées avant tout pour décrire des relations valables à l'équilibre thermodynamique ( $PV = nRT$  dans les gaz parfaits à l'équilibre, par exemple). Au contraire, les équations constitutives rendent plutôt compte de phénomènes irréversibles (par exemple, la loi de la conduction de Fourier  $\mathbf{q} = -k\nabla T$  exprime que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température).

A la différence des équations de conservation qui sont valables quels que soient les milieux continus étudiés, les équations constitutives et les équations d'état sont des équations qui décrivent les comportements macroscopiques typiques des différents matériaux possibles. Elles permettent donc de rendre compte de la « nature propre » des différents matériaux continus. On peut dire également que les équations d'état et les équations constitutives servent à rendre compte macroscopiquement des réactions microscopiques d'un matériau soumis à des contraintes macroscopiques. Ce dernier point de vue permet de comprendre clairement que ces équations « manquantes » sont bien des caractéristiques intrinsèques des matériaux et ne peuvent donc être considérées comme des équations fondamentales de la physique valables pour tous les systèmes continus. Elles servent en fin de compte à distinguer les différents milieux continus.

Historiquement, ces équations ont souvent été découvertes expérimentalement. Pour cette raison, on pourrait regrouper les équations d'état et les équations constitutives sous le terme général d'équations phénoménologiques.

L'étude théorique de ces équations phénoménologiques peut se faire de plusieurs points de vue, qui sont d'ailleurs souvent complémentaires. Tout d'abord, il est clair que des études microscopiques peuvent être des plus intéressantes. La théorie cinétique des gaz permet par exemple de décrire de manière fort satisfaisante les notions de pression et de température ainsi que les phénomènes de conduction thermique ou de viscosité. L'étude de l'état solide permet quant à elle de fournir des descriptions des phénomènes d'élasticité. Faute de temps cependant, ces études seront peu envisagées dans ce cours, en dépit de leur intérêt indiscutable.

L'autre façon de procéder est de nature macroscopique. On ne se préoccupe pas directement des comportements microscopiques de la matière et on tente d'écrire directement des équations phénoménologiques générales. Ce genre d'approches est réalisé dans le contexte des théories modernes de thermodynamique des phénomènes irréversibles qui permettent de proposer des équations phénoménologiques très générales en se basant sur quelques principes

fondamentaux. Ces études sont assez complexes et on pourra difficilement les aborder en détail dans ce cours. Nous verrons cependant l'une ou l'autre illustration (phénomène de conduction thermique et de viscosité dans le cadre de la thermodynamique dite « classique »).

Pour terminer, faisons remarquer que la formulation d'équations constitutives ou d'équations d'état est un projet des plus ambitieux puisque, on l'a dit, cela consiste à tenter de rendre compte macroscopiquement des différents comportements microscopiques possibles. On peut imaginer par exemple qu'il est virtuellement impossible d'écrire une équation constitutive qui rendrait compte de tous les comportements possibles d'un solide, quelles que soient les conditions de déformation ou de température dans lesquelles ce solide serait plongé. Pour cette raison, il est intéressant d'introduire la notion de *milieu idéal*. Un milieu idéal est défini par un ensemble d'équations phénoménologiques relativement simples et constitue un modèle acceptable des matériaux réels lorsque les contraintes qu'on applique à ces matériaux sont limitées à certains domaines de valeur. On va ainsi étudier dans ce qui suit les milieux idéaux que sont le solide élastique (ou solide de Hooke), le fluide parfait et le fluide visqueux (ou fluide newtonien).

# 5 Le solide élastique linéaire, ou solide de Hooke

## 5.1 Approche expérimentale

Soit une pièce cylindrique en traction uniaxiale parallèle à son axe :

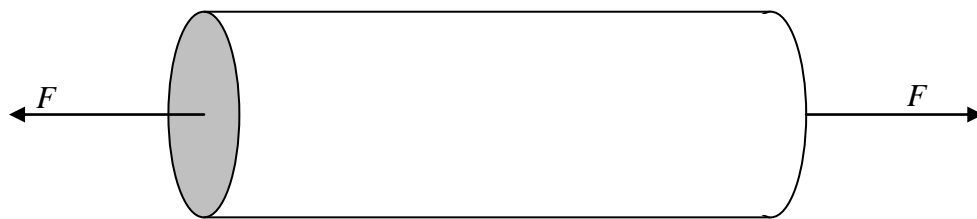


Fig. 5.1

- Rapport entre la contrainte exercée et l'allongement relatif de la barre :

$$\sigma = \frac{F}{S} = f\left(\frac{l-l_0}{l_0}\right) \quad (5.1.1)$$

- Diagramme typique de traction d'un acier :

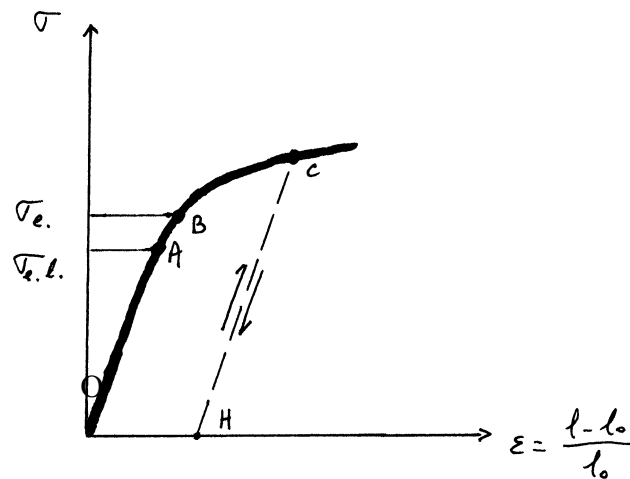


Fig. 5.2

- 3 zones sur la courbe

- Zone OA : Elasticité linéaire (Hooke)

- comportement élastique (retour en O à la décharge)
- proportionnalité entre contrainte et déformation :

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{l - l_0}{l_0} \text{ pour } \sigma \leq \sigma_{el}, \text{ où } E \text{ est le module de Young.}$$

- Zone AB : Elasticité non linéaire

- comportement élastique (retour en O à la décharge)
- relation non linéaire entre contrainte et déformation

$$\sigma = \frac{F}{S} = f\left(\frac{l - l_0}{l_0}\right) \text{ pour } \sigma_{el} \leq \sigma \leq \sigma_e$$

- Zone BC : Zone de déformations plastiques

- Comportement non élastique (pas de retour en O à la décharge)
- Après décharge, il subsiste une déformation permanente

- On va étudier la zone OA. Cette zone correspond à des conditions « normales » d'utilisation de nombreux matériaux. Par exemple, pour de l'acier, on a  $\sigma_{el}$  de l'ordre de 25 à 60  $kgf/mm^2$ . Pour de telles contraintes, l'allongement relatif est de l'ordre de 0.2%. On comprend donc que l'on va pouvoir faire l'hypothèse des petites perturbations et considérer que les déformations restent infinitésimales.

## 5.2 Elasticité linéaire : hypothèses générales

Lorsqu'un corps solide est soumis à des forces extérieures, il peut se déplacer et /ou se déformer. Un solide sera dit élastique si, conformément à l'intuition, il reprend spontanément sa forme de départ lorsque les contraintes extérieures sont supprimées<sup>1</sup>. Ainsi, les déformations des solides élastiques sont par définition réversibles. Dans ce qui suit, nous admettrons en outre que l'état naturel d'un solide élastique, c'est-à-dire son état en l'absence de toute force extérieure, est caractérisé par une forme bien déterminée ainsi que par l'annulation de toutes les contraintes internes<sup>2</sup>.

L'objet de la théorie de l'élasticité classique<sup>3</sup> est l'étude des déformations de ces solides élastiques sous l'effet de forces extérieures. Dans ce cours, nous nous limiterons à l'étude de l'élasticité linéaire caractérisée par le fait que les configurations du système

<sup>1</sup> Il peut éventuellement avoir subi un déplacement d'ensemble.

<sup>2</sup> Pratiquement, ce n'est pas toujours aisé à réaliser. Les matériaux présentent souvent ce que l'on appelle des « contraintes résiduelles » qui trouvent leur origine dans les procédés de fabrication ou de mise en forme par exemple.

<sup>3</sup> Dont l'origine remonte aux années 1800-1850. Les grands noms des débuts de cette théorie sont Cauchy, Kirchhoff, Green, Navier, Poisson. Les observations préliminaires de Hooke sont bien antérieures (1660).

déformé restent toujours « voisines » d'une configuration de référence qui est un état naturel du système, c'est-à-dire un état d'équilibre dans lequel toutes les contraintes s'annulent. Dans ce contexte, on pourra donc faire l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et confondre les descriptions eulérienne et lagrangienne.

Soulignons aussi que dans le cadre de cette première approche de l'élasticité, nous nous attacherons principalement à décrire les effets mécaniques (déformations, tensions) se produisant dans les solides en déformation en nous préoccupant assez peu des phénomènes thermiques qui peuvent se produire simultanément. De manière plus précise, nous allons supposer que la température n'influe pas sur les relations entre tensions et déformations dans le solide. Dans ces conditions, nous décrirons les déformations des solides élastiques au moyen de la seule équation (mécanique) de conservation de la quantité de mouvement car elle est tout à fait découplée de l'équation (thermique) de conservation de l'énergie. Cette équation de l'énergie permettrait, si on le voulait, d'étudier en plus le champ de température au sein du matériau. Evidemment, cette hypothèse simplificatrice a pour conséquence que le modèle que nous allons développer ne permet pas de rendre compte de certains phénomènes bien réels de couplage entre effets thermiques et mécaniques dans les solides en déformation. Par exemple, on ne pourra pas décrire les variations de volume des corps que l'on chauffe à pression constante, ni l'apparition de tensions dans les corps chauffés à volume constant. On ne pourra pas non plus rendre compte des augmentations de température qui apparaissent habituellement dans les solides comprimés adiabatiquement.

### 5.3 Equations de conservation de l'élasticité linéaire

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (« HPP »), l'équation de conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire, en la limitant au premier ordre :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (5.3.1)$$

où le vecteur  $\mathbf{u}$  désigne le champ des déplacements par rapport à la configuration de départ. On peut considérer dans cette équation que les coordonnées  $x$  par rapport auxquelles on dérive sont les coordonnées lagrangiennes. De plus, la densité  $\rho$  peut être considérée constante dans le temps car ses variations donneraient des contributions d'ordre deux dans l'équation<sup>4</sup>.

L'équation (5.3.1) est donc une équation approchée écrite « dans la configuration non-déformée ». Cela présente l'avantage typiquement lagrangien que le domaine sur lequel on travaille est fixe et connu puisqu'il s'agit de la configuration de référence. Rappelons cependant que les résultats qui découlent de cette équation n'ont qu'une valeur asymptotique, pour des déplacements très petits. Néanmoins, dans de très nombreux problèmes, l'expérience a montré que les solutions trouvées dans le cadre de cette théorie sont souvent très satisfaisantes et toujours très instructives.

---

<sup>4</sup> En coordonnées lagrangiennes, l'équation de conservation de la masse peut aussi s'écrire, à partir de (2.5.26),  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x})(1 - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))$ , où  $\rho_0$  désigne la densité dans la configuration de référence.

Cette équation doit être assortie de conditions initiales ainsi que de conditions aux limites, traduisant les contraintes appliquées au solide étudié par le monde extérieur. Ces conditions aux limites peuvent être de 2 types : soit on impose des efforts sur la surface extérieure du solide étudié, soit on impose des déplacements. Ces 2 types de conditions peuvent évidemment se rencontrer dans un seul problème : à certains endroits de la surface, on impose des forces, à d'autres, on impose des déplacements. Mathématiquement, ces conditions s'écrivent :

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{t}_0 \text{ sur } S_1 \quad (5.3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } S_2 \quad (5.3.3)$$

avec  $S_1 \cup S_2 = S$  la surface extérieure du solide étudié<sup>5</sup> ;  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{u}_0$  sont des fonctions (infinitésimales) données de la position et du temps. On peut faire quelques remarques à propos de ces conditions aux limites. Tout d'abord, en accord avec HPP, il faut noter que les conditions aux limites sont imposées sur la configuration non déformée et non pas sur la configuration réelle. De plus, dans le cas où seulement des tensions sont imposées comme conditions aux limites ( $S_2 = 0$ ), ces tensions doivent satisfaire à certaines conditions afin d'éviter un déplacement d'ensemble du solide qui l'éloignerait de sa configuration de référence, en rendant ainsi caduque l'hypothèse des petites perturbations. Lorsqu'on s'intéressera aux solutions d'équilibre par exemple (élastostatique), il faudra supposer que la résultante et le moment résultant de l'ensemble des forces appliquées au matériau sont égaux à zéro.

## 5.4 La loi de Hooke

Puisqu'un solide élastique retourne à son état naturel lorsque les forces extérieures disparaissent, il paraît naturel de penser que les déformations du solide engendrent des tensions au sein de celui-ci et que ce sont précisément ces tensions internes qui permettent au solide de retourner vers son état naturel. Ainsi, on va supposer que dans un solide élastique, les tensions peuvent s'exprimer comme une fonction des déformations.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, on suppose en outre que les déformations sont infinitésimales et peuvent donc être représentées par le tenseur des déformations infinitésimales

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Vu l'hypothèse des petites perturbations, on peut aussi supposer que les tensions s'expriment comme une fonction linéaire en les déformations. Cette fonction est de plus homogène puisque les tensions doivent s'annuler avec les déformations si l'état naturel est un état sans contrainte. On supposera donc que la loi d'état qui lie les tensions aux déformations s'écrit :

---

<sup>5</sup> De manière encore un peu plus générale, on peut éventuellement en certains points de la surface fixer certaines composantes des déplacements et les autres composantes des tensions (par exemple, on impose  $u_1$ ,  $u_2$  et  $t_3$ ).

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (5.4.1)$$

où  $\mathbf{c}$  est un tenseur d'ordre 4. En fonction des composantes dans une base cartésienne, on a donc<sup>6</sup> :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.4.2)$$

Si le matériau que l'on étudie est hétérogène, le tenseur  $\mathbf{c}$ , et donc ses composantes, peuvent dépendre explicitement de la position<sup>7</sup>  $\mathbf{x}$ . Dans un solide homogène,  $\mathbf{c}$  ne dépend pas de la position. Ce tenseur pourrait également dépendre d'autres paramètres physiques tels que par exemple la température. Nous ne considérerons cependant pas cette possibilité dans ce cours (découplage des effets mécaniques et thermiques).

La loi linéaire (5.4.1-2) porte le nom de loi de Hooke ; elle généralise aux déformations tridimensionnelles le fait expérimental que des tractions uniaxiales dans des barres rectilignes engendrent des allongements proportionnels aux efforts ainsi que le fait que la torsion d'une barre cylindrique creuse à paroi mince est aussi décrite par une loi linéaire qui relie le taux de cisaillement à l'angle produit par la déformation.

Les composantes du tenseur  $\mathbf{c}$  introduit ci-dessus sont, en toute généralité, au nombre de  $81=3^4$  ; cependant à cause de la symétrie de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , seuls 36 coefficients sont indépendants car on peut supposer :

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad \text{et} \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (5.4.3)$$

Une hypothèse supplémentaire permet de réduire le nombre des composantes indépendantes à 21. Nous supposons à présent que les matériaux que nous étudions sont *hyper-élastiques* (on dit aussi que ces matériaux sont des matériaux élastiques *de Green*). Cela signifie qu'il existe une fonction des déformations  $W$ , appelée *énergie de déformation*, telle que

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{kl})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (5.4.4)$$

Avant de montrer que l'hypothèse de matériau hyper-élastique permet de réduire le nombre de composantes indépendantes du tenseur  $\mathbf{c}$ , il est intéressant de montrer que l'existence de l'énergie de déformation peut être considérée comme une conséquence du 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique (plutôt que comme un principe supplémentaire).

Le raisonnement dans le contexte de la thermostatique repose sur le fait (expérimental) que l'énergie interne d'un solide en déformation (infinitésimale) est une fonction des déformations et de l'entropie. On a donc

$$u = u(\varepsilon_{ij}, s) \quad (5.4.5)$$

où  $u$  et  $s$  désignent les densités massiques d'énergie interne et d'entropie.

<sup>6</sup> Il est facile et instructif de montrer que  $c_{ijkl}$  est bien un tenseur d'ordre 4.

<sup>7</sup> Ou plus exactement de la particule matérielle  $\mathbf{X}$ , mais c'est équivalent dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

Considérons à présent le cas où les déformations du solide se font de manière adiabatique<sup>8</sup>. Puisque les déformations élastiques sont un processus réversible et qu'il n'y a pas d'échange de chaleur, l'entropie du solide qui se déforme ne varie pas. L'évolution adiabatique est donc isentropique. De (5.4.5), on déduit alors

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} V_{ij} \quad (5.4.6)$$

vu (2.6.14). L'équation d'évolution de l'énergie (3.5.13) donne quant à elle, en l'absence d'échange de chaleur :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma_{ij} V_{ij} \quad (5.4.7)$$

En comparant (5.4.6) et (5.4.7), il vient

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} V_{ij} = \sigma_{ij} V_{ij} \quad (5.4.8)$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le tenseur taux de déformation. Il vient donc, en tenant compte que la densité peut être considérée comme constante lors de déformations infinitésimales,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (5.4.9)$$

Cette relation montre que l'énergie interne (par unité de volume) est l'énergie de déformation  $W$  cherchée.

Comme l'équilibre thermodynamique peut être défini comme l'état qui minimise l'énergie interne à entropie fixée, on peut déduire en outre que l'énergie de déformation est une forme définie positive des déformations.

De manière similaire, on peut montrer qu'il existe aussi une énergie de déformation lorsque les déformations se produisent à température constante. Il s'agit alors de l'énergie libre de Gibbs. Elle est également définie positive.

On supposera donc qu'il existe toujours une énergie de déformation et que celle-ci est définie positive :

$$W(\varepsilon_{ij}) > 0 \text{ si } \varepsilon_{ij} \neq 0 \quad (5.4.10)$$

Montrons à présent que l'existence de l'énergie de déformation ramène à 21 le nombre de composantes indépendantes du tenseur  $\mathbf{c}$ . En dérivant (5.4.4) par rapport à  $\varepsilon_{kl}$ , il vient

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W(\varepsilon_{kl})}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 W(\varepsilon_{kl})}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (5.4.11)$$

---

<sup>8</sup> C'est bien le cas si le solide étudié est isolé thermiquement du reste du monde ou aussi si les déformations qu'il subit sont trop rapides pour que des échanges importants de chaleur puissent avoir lieu.

A partir de (5.4.2), on déduit donc

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (5.4.12)$$

On montre alors facilement que l'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} c_{mnpq} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5.4.13)$$

L'existence de certaines propriétés de symétrie dans les caractéristiques élastiques d'un matériau permet aussi de réduire le nombre de coefficients indépendants. En particulier, si le matériau est isotrope, on peut voir que seules 2 constantes subsistent. La loi constitutive d'un solide de Hooke isotrope<sup>9</sup> s'écrit dans ce cas :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5.4.14)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  (parfois noté  $G$  dans la littérature) sont les constantes élastiques « de Lamé ».

En prenant la trace de cette équation, il vient

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{ii} \quad (5.4.15)$$

L'équation constitutive peut alors se récrire, en séparant la trace et le déviateur :

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 3K \varepsilon_{ii} \\ \hat{\sigma}_{ij} &= 2\mu \hat{\varepsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

où le « chapeau » désigne la partie déviatorique du tenseur ;  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  est le module de rigidité à la compression (*cf.* interprétation plus bas).

Il est facile de voir que l'équation constitutive peut aussi « s'inverser » en :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (5.4.17)$$

où  $E$  est le module d'élasticité de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson. En fonction de ces quantités, les coefficients de Lamé s'écrivent :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.4.18a)$$

avec, en inversant

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (5.4.18b)$$

En fonction de  $E$  et  $\nu$ , le module de rigidité à la compression s'écrit :

<sup>9</sup> La forme la plus générale d'un tenseur isotrope d'ordre 4 vérifiant (5.4.3) est

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Dans ces conditions (5.4.12) est toujours automatiquement vérifiée et l'énergie de déformation existe indépendamment de tout raisonnement thermodynamique.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5.4.18c)$$

L'ordre de grandeur des coefficients élastiques de quelques matériaux courants est donné dans le tableau ci-dessous.

	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	Module de Young (kN/cm <sup>2</sup> )	Coefficient de Poisson
<b>Acier</b>	7850	20500	0.3
<b>Aluminium</b>	2700	7000	0.33
<b>Cuivre</b>	2930	12000	0.35
<b>Sapin sec</b>	550	1050	0.46
<b>Chêne sec</b>	800	1150	0.45
<b>Béton</b>	2300	3500	0.18
<b>Verre</b>	2500	6000	0.22
<b>Caoutchouc</b>	1200	5	0.50
<b>Plexiglas</b>	1180	300	0.36

Pour le sapin, le chêne et le béton, les coefficients de Poisson sont mesurés en compression ; les valeurs se rapportant à la traction diffèrent éventuellement (0.12 pour le béton)

Le caractère défini positif de l'énergie de déformation permet de donner certaines restrictions sur les différents modules élastiques. Vu (5.4.13-14), on a

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \sigma_{kl} \varepsilon_{kl} \\
 &= \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{ii} \delta_{kl} + 2\mu \varepsilon_{kl}) \varepsilon_{kl} \\
 &= \frac{1}{2} (\lambda \text{tr}(\varepsilon)^2 + 2\mu \varepsilon : \varepsilon) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \text{tr}(\varepsilon)^2 + 2\mu \widehat{\varepsilon} : \widehat{\varepsilon} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (K \text{tr}(\varepsilon)^2 + 2\mu \widehat{\varepsilon} : \widehat{\varepsilon})
 \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Le caractère défini positif de  $W$  est donc équivalent à

$$K > 0 \quad \text{et} \quad \mu > 0 \quad (5.4.20)$$

vu que  $\text{tr}(\varepsilon)$  et  $\widehat{\varepsilon} : \widehat{\varepsilon}$  sont des quantités indépendantes. En fonction du module de Young et du coefficient de Poisson, ces inégalités s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 E &> 0 \\
 -1 &< \nu < \frac{1}{2}
 \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Notons cependant que l'expérience montre que  $\nu$  est toujours positif (*cf.* interprétation plus bas).

## 5.5 Résumé des équations

Si l'on ne considère pas le couplage des effets thermiques et mécaniques, les équations de l'élasticité linéaire isotrope sont :

$$\text{Equations de mouvement : } \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3 \text{ relations}) \quad (5.5.1)$$

$$\text{Loi de Hooke isotrope : } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \text{ou} \\ \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \end{array} \right. \quad (6 \text{ relations}) \quad (5.5.2)$$

$$\text{Équations géométriques : } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (6 \text{ relations}) \quad (5.5.3)$$

On a donc 15 équations pour les 15 inconnues que sont les 6 composantes du tenseur des tensions, les 6 composantes du tenseur des déformations et les 3 composantes du vecteur déplacement. Il convient en outre d'adjoindre les conditions aux limites décrites plus haut.

## 5.6 Elasto-statique

En élasto-statique ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ), les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme d'équations d'équilibre :

$$\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (5.6.1)$$

De plus, les conditions aux limites sont indépendantes du temps. La solution complète d'un problème d'élastostatique consiste alors à déterminer les champs de contraintes et de déformation ainsi que le champ des déplacements.

### EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

On peut montrer que, pour un matériau de Hooke général (équation constitutive (5.4.1)), un problème d'élasto-statique admet une et une seule solution pour autant qu'il existe une énergie de déformation définie positive. En particulier, si le matériau est isotrope, la solution existe et est unique si le module de Young et le coefficient de Poisson satisfont aux inégalités (5.4.21).

Ajoutons encore que cette unicité est stricte pour les champs des déformations ou des contraintes. En revanche, les déplacements ne sont uniques que si le déplacement et la rotation sont fixés en un point. Ces conditions supplémentaires sont évidemment automatiquement fournies par les conditions aux limites du problème si celles-ci imposent, par exemple, les déplacements sur une portion d'aire non vide de la surface extérieure de l'échantillon étudié ou aussi si elles fixent les déplacements de 3 points non alignés.

L'unicité de la solution des problèmes d'élastostatique permet de justifier l'utilisation d'une méthode pratique de résolution appelée *méthode semi-inverse*.

La résolution du système d'équations (5.5.1-3) est souvent extrêmement ardue et il est souvent intéressant d'essayer de deviner la forme générale de la solution. On propose donc de manière intuitive une expression de certaines composantes des contraintes et/ou des déformations faisant apparaître suffisamment de paramètres indéterminés pour satisfaire aux équations générales et aux conditions aux limites. Grâce au théorème d'unicité, on peut alors affirmer que, si on trouve une solution, elle est aussi la seule.

On peut également comprendre qu'il est extrêmement difficile d'imposer des conditions aux limites réalistes dans un problème pratique. Prenons par exemple (Fig. 5.3) le cas d'une barre encastrée soumise à son extrémité libre à un couple de torsion  $M$ .

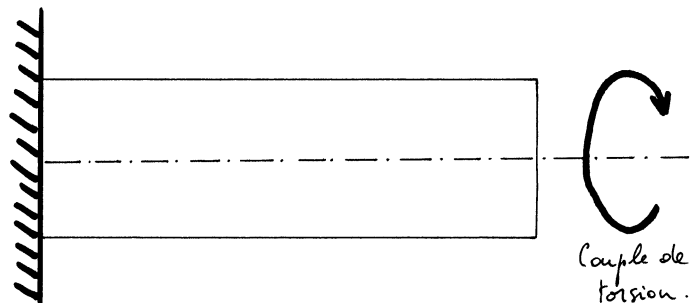


Fig. 5.3

L'extrémité droite de la poutre constitue une partie de la surface extérieure du corps solide étudié sur laquelle des forces de contact  $\mathbf{t}$  sont imposées. Il est cependant pratiquement impossible de déterminer avec exactitude, pour un dispositif expérimental donné, comment les forces superficielles se répartissent sur la surface. Dans la pratique, on lève cette difficulté en introduisant le **Principe de Saint-Venant** (1855) que l'on peut énoncer comme suit :

*Si une distribution de forces de contact agissant sur une portion de surface d'un corps élastique est remplacée par une distribution de forces différente, mais statiquement équivalente à la première, les effets des deux distributions sont essentiellement les mêmes à une distance suffisamment grande de la zone d'application.*

L'utilisation de ce principe est justifiée par un très bon accord avec les résultats expérimentaux. Rappelons aussi que l'on dit que deux systèmes de forces sont statiquement équivalents si les forces résultantes et les moments résultants par rapport à un point fixé sont égaux. Dans le cas de la torsion, par exemple, quel que soit le mode d'application du couple de torsion, les déplacements et les contraintes seront les mêmes à une distance de la section terminale égale à quelques diamètres.

Dans le même ordre d'idées, il arrive également que l'on s'autorise à introduire une certaine souplesse dans l'écriture des conditions aux limites portant sur les déplacements. Par

exemple lorsqu'une partie de la surface extérieure d'un corps est « encastrée », on n'exprimera pas l'annulation des tous les déplacements sur cette surface mais on se contentera d'annuler le déplacement et la rotation en un point de cette surface. De même que ci-dessus, c'est la comparaison avec l'expérience des résultats déduits de cette simplification qui a permis de valider la démarche.

## 5.7 Equations de Navier

Les équations de Navier s'obtiennent en éliminant les tensions et les déformations entre toutes les équations données ci-dessus. On obtient alors des équations pour les déplacements, qui sont souvent les quantités auxquelles on s'intéresse. On trouve :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$$

ou

(5.7.1)

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$$

Les conditions aux limites pour les déplacements s'écrivent directement alors que les conditions de tractions imposées prennent la forme :

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{n} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \text{ donné}$$

ou

(5.7.2)

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{n} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \text{ donné}$$

## 5.8 Interprétation des coefficients élastiques

Quelques problèmes simples d'élastostatique vont permettre des interprétations physiques intéressantes de divers coefficients élastiques. Nous étudierons successivement la compression uniforme, la traction simple et le cisaillement simple.

### 5.8.1 COMPRESSION UNIFORME

Considérons un corps élastique, homogène et isotrope, de Hooke qui est plongé dans un gaz dont la pression est constante (Fig. 5.4). Négligeons toute force volumique (telle que la force de gravité).

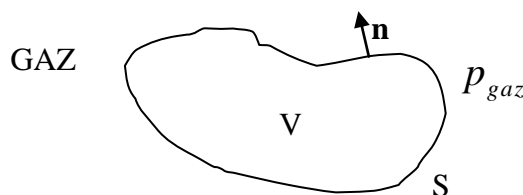


Fig. 5.4

En régime stationnaire, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ dans } V$$

Les conditions aux limites traduisent un état de pression uniforme sur la surface extérieure S :

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = -p_{gaz} \mathbf{n} \text{ sur } S$$

On vérifie alors aisément que la solution pour le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p_{gaz} \mathbf{I}$$

où I est le tenseur unité.

Déterminons à présent le tenseur des déformations. À partir de (5.4.17), il vient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{1-2\nu}{E} p_{gaz} \mathbf{I} = \frac{-p_{gaz}}{3K} \mathbf{I},$$

où K est le module de rigidité à la compression (5.4.18c). Cette appellation est justifiée par le raisonnement suivant. On a tout d'abord

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{-p_{gaz}}{K}$$

Vu l'homogénéité de la solution, on a donc

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{-p_{gaz}}{K}$$

La quantité K est donc bien un module de rigidité à la compression ;  $K^{-1}$  peut être considéré comme un module de compressibilité ( $K = \infty$ , c'est-à-dire  $\nu = 1/2$ , définit un matériau incompressible). Remarquons enfin que le caractère positif de K (éq. 5.4.20) implique que le volume d'un matériau que l'on comprime ne peut que diminuer.

Si l'origine du système d'axes est choisie dans le corps et si le déplacement et la rotation s'y annulent, le champ des déplacements s'écrit :

$$u_i = \frac{-p_{gaz}}{3K} X_i$$

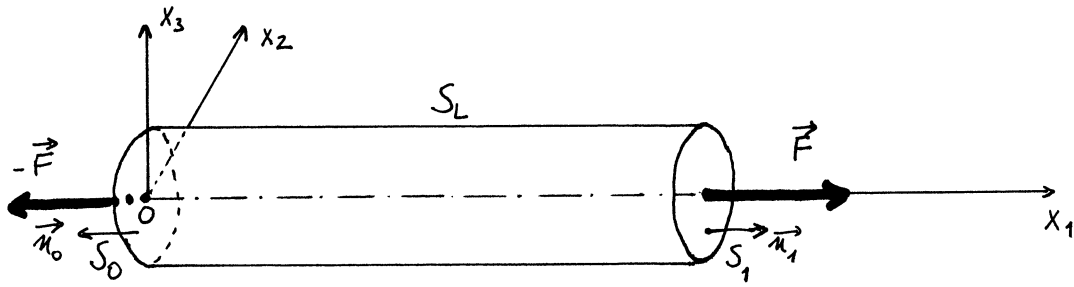


Fig. 5.5

Considérons un échantillon cylindrique de longueur  $L$  d'un matériau élastique homogène et isotrope de Hooke. Les deux sections droites  $S_0$  et  $S_1$  limitant l'échantillon sont soumises à deux forces de traction  $\mathbf{F}$  et  $-\mathbf{F}$  respectivement. Nous supposons que ces forces sont réparties uniformément sur les deux sections droites avec une densité surfacique égale à  $F/S$  ( $F = \|\mathbf{F}\|$  ;  $S$  est l'aire des 2 sections droites). Les forces de volume sont négligées et aucune force n'est exercée sur la surface latérale  $S_L$ . Le système d'axes que nous allons utiliser est représenté dans la Fig. 5.5.

Le tenseur des contraintes satisfait à l'équation

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0$$

alors que les conditions aux limites sont données par

$$\mathbf{n}_0 \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \frac{-F}{S} \mathbf{e}_1 \quad \text{sur } S_0$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{S} \mathbf{e}_1 \quad \text{sur } S_1$$

$$\mathbf{n}_L \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad \text{sur } S_L$$

Vu le choix des axes, on a

$$-\mathbf{e}_1 \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \frac{-F}{S} \mathbf{e}_1 \quad \text{sur } S_0$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{S} \mathbf{e}_1 \quad \text{sur } S_1$$

$$(n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3) \cdot \underline{\underline{\sigma}} = n_2 \sigma_{2k} + n_3 \sigma_{3k} = 0 \quad \text{sur } S_L$$

ou encore

$$-\sigma_{11} = \frac{-F}{S}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{sur } S_0$$

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{sur } S_1$$

$$n_2 \sigma_{2k} + n_3 \sigma_{3k} = 0 \quad \text{sur } S_L$$

On vérifie alors facilement que le tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{F}{S} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

constitue la solution. Les déformations s'obtiennent à partir de la loi de Hooke inversée (5.4.17). On trouve facilement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} \sigma \quad [= -\nu \varepsilon_{11}] \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations est donc diagonal et ses axes principaux sont les axes de coordonnées choisis. En fixant un déplacement et une rotation nuls en l'origine, le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon_{11} x_1 \\ u_2 &= \varepsilon_{22} x_2 \\ u_3 &= \varepsilon_{33} x_3 \end{aligned}$$

On peut proposer une interprétation intéressante du module de Young et du coefficient de Poisson en analysant plus en détail la solution. Calculons tout d'abord l'allongement de la barre. En utilisant l'interprétation des composantes du tenseur des déformations infinitésimales ainsi que l'homogénéité de la solution, on a immédiatement<sup>10</sup> :

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{E}$$

où  $E$  est le module de Young. Cette quantité est positive vu (5.4.21) et permet donc de déterminer l'allongement relatif de l'échantillon en fonction de la contrainte appliquée.

On peut ensuite évaluer les variations des dimensions transversales de l'échantillon. Avec des notations habituelles, les variations de la distance entre 2 particules appartenant à une section transversale s'écrivent :

$$ds^2 - dS^2 = 2 \begin{pmatrix} dY \\ dZ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dY \\ dZ \end{pmatrix} = 2\varepsilon_{22} dS^2$$

Il vient donc successivement :

<sup>10</sup> On peut également calculer l'allongement en évaluant le déplacement de la section  $S_j$ .

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= (1 + 2\varepsilon_{22})dS^2 \\
 ds &\approx (1 + \varepsilon_{22})dS \\
 \frac{ds - dS}{dS} &= \varepsilon_{22}
 \end{aligned}$$

Si  $\ell$  est une dimension transversale de l'échantillon, il vient donc, vu l'homogénéité de la solution :

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} .$$

Comme  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$ , on a :

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = -\nu\frac{\Delta L}{L}$$

Dans une expérience de traction simple, le coefficient de Poisson permet donc de déterminer la réduction relative des dimensions transversales d'un échantillon en fonction de son allongement relatif. Ajoutons aussi que les expériences montrent que  $\nu > 0$  puisqu'on n'observe jamais d'épaississement à l'allongement. Ce résultat phénoménologique restreint donc l'intervalle des variations de  $\nu$  donné par la relation thermodynamique (5.4.21).

Remarquons enfin que le volume ne peut qu'augmenter lors d'un essai en traction simple. En effet, on a

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{tr}(\varepsilon) = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma$$

Cette quantité est toujours positive puisque  $\nu < 1/2$  par (5.4.21).

### 5.8.3 CISAILLEMENT SIMPLE

Un corps parallélépipédique homogène et isotrope de Hooke est dit *en cisaillement simple* si les déplacements infinitésimaux suivants lui sont imposés (voir Fig. 5.6) :

$$\begin{cases}
 u_1 = kx_3 \\
 u_2 = 0 \\
 u_3 = 0
 \end{cases}$$

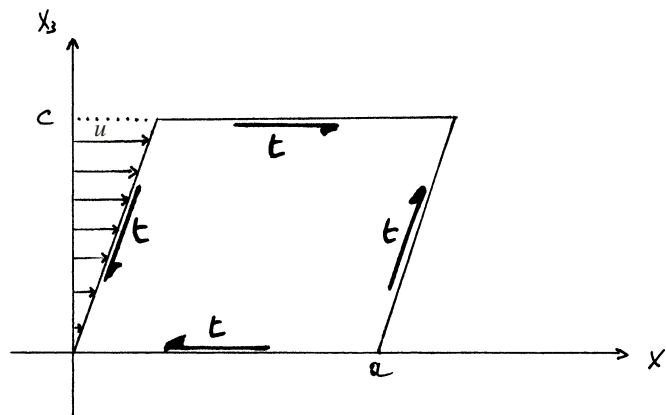


Fig. 5.6

Déterminons à présent les forces à appliquer à l'échantillon pour engendrer ces déformations.

Le tenseur des déformations infinitésimales est donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} . & . & k/2 \\ . & . & . \\ k/2 & . & . \end{pmatrix}$$

Par la loi de Hooke, on déduit<sup>11</sup>

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} . & . & k\mu \\ . & . & . \\ k\mu & . & . \end{pmatrix}$$

Les tensions sont donc constantes. Un tel résultat n'est compatible avec les équations d'équilibre que si les forces de volume sont nulles (ou négligeables).

Les densités surfaciques de force *de cisaillement* à appliquer sur l'échantillon sont donc (voir Fig. 5.6), avec  $\mu > 0$  vu (5.4.20) :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (0, 0, -k\mu) & \text{en } x_1 = 0 \\ \mathbf{t} &= (0, 0, k\mu) & \text{en } x_1 = a \\ \mathbf{t} &= 0 & \text{en } x_2 = 0 \\ \mathbf{t} &= 0 & \text{en } x_2 = b \\ \mathbf{t} &= (-k\mu, 0, 0) & \text{en } x_3 = 0 \\ \mathbf{t} &= (k\mu, 0, 0) & \text{en } x_3 = c \end{aligned}$$

## 5.9 Application : Ondes (volumiques) dans les solides élastiques isotropes

- Considérons un milieu élastique isotrope et infini. Si on néglige les forces extérieures, les équations de Navier s'écrivent :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1)$$

- Cherchons des solutions sous forme d'ondes planes se propageant le long de l'axe  $x$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \\ w(x, t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Injectons cette forme générale de solution dans les équations :

<sup>11</sup> C'est grâce à la propriété d'isotropie du matériau qu'un tenseur de cisaillement simple correspond aux déformations de cisaillement simple imposées.

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \mathbf{e}_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

En projetant sur  $x$  tout d'abord, on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

ou encore

$$\left( \partial_x^2 - \frac{1}{c_l^2} \partial_t^2 \right) u = 0 \quad (5)$$

avec

$$c_l = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ ou } c_l = \left( \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

En projetant sur  $y$  et  $z$ , il vient :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (7)$$

c'est-à-dire

$$\left( \partial_x^2 - \frac{1}{c_t^2} \partial_t^2 \right) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

avec

$$c_t = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ ou } c_t = \left( \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

- (5) et (8) sont deux équations d'ondes unidimensionnelles, du type

$$\left( \partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) f = 0 \quad (10)$$

dont les solutions s'écrivent

$$f = \text{fonction quelconque de } (x \pm ct) \quad (11)$$

et représentent des phénomènes de propagation à vitesse  $c$  le long de l'axe  $x$ . Les solutions de (1) sous forme d'onde plane sont donc faites de 2 ondes progressant indépendamment :

$$\mathbf{u}_L = \begin{pmatrix} u(x \pm c_L t) \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_T = \begin{pmatrix} \cdot \\ v(x \pm c_T t) \\ w(x \pm c_T t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

avec  $u, v, w$  = fonctions quelconques de leur argument (ces fonctions sont en fait données par la perturbation initiale qui se propage simplement et sans déformation).

- Ces ondes s'appellent traditionnellement les ondes P et les ondes S. Nous allons les examiner successivement plus en détail.

### 1. Les ondes P

Les ondes P sont les solutions

$$\mathbf{u}_L = \begin{pmatrix} u(x \pm c_L t) \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

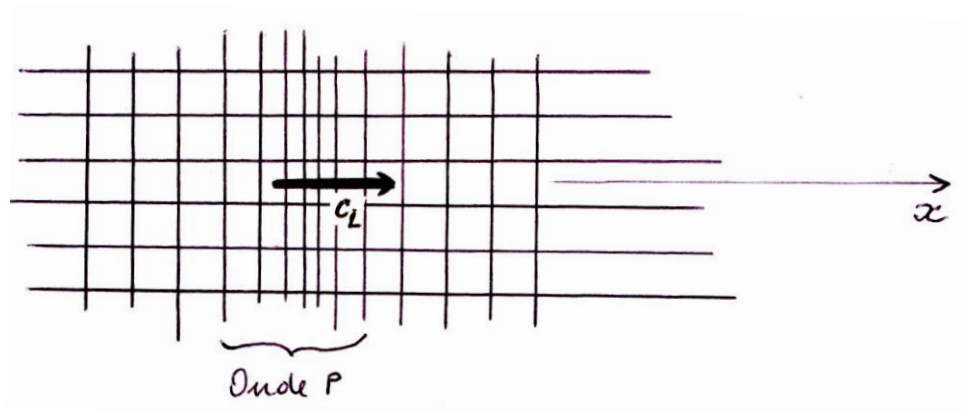
Il s'agit d'ondes *longitudinales* qui se propagent à la vitesse  $c_L$ , que l'on appelle la *vitesse longitudinale* du son. Leurs caractéristiques sont :

- $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$  et donc  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$  d'où  $\frac{dV - dV_0}{dV_0} \neq 0$   $\left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = -\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \right)$ .

On déduit donc que le passage de l'onde est caractérisé par des variations de volume (et de densité) des particules matérielles constituant le milieu continu.

- $\operatorname{rot} \mathbf{u}_L = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u(x \pm c_L t) & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = 0$  et les ondes sont irrotationnelles, ce qui signifie que les particules matérielles ne tournent pas lorsque l'onde passe (cf. l'interprétation de  $\nabla \times \mathbf{u}$  dans l'équation (2.6.22)).

- Les ondes P sont donc des ondes de Pression, caractérisées par le fait que les plans matériels perpendiculaires à  $x$  se pressent les uns sur les autres dans la direction  $x$ , sans se déplacer dans les directions  $y$  et  $z$ .
- Si  $\nu = 1/2$  (matériau incompressible), on a  $c_L \rightarrow \infty$  et les ondes P n'existent plus.



### 2. Les ondes S

Les ondes S sont les solutions

$$\mathbf{u}_T = \begin{pmatrix} \cdot \\ v(x \pm c_T t) \\ w(x \pm c_T t) \end{pmatrix}.$$

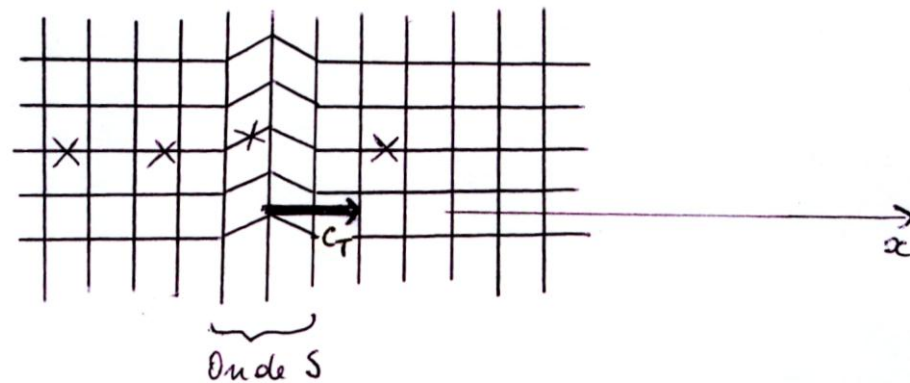
Il s'agit d'ondes *transversales* qui se propagent à la vitesse  $c_T$ , que l'on appelle la *vitesse transversale* du son. Leurs caractéristiques sont :

- $\text{div}\mathbf{u}_T = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , d'où le fait que le passage de l'onde se fait sans variation de volume (ou de densité) des particules matérielles constituant le milieu continu.

- $\text{rot}\mathbf{u}_T = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cdot & v(x \pm c_L t) & w(x \pm c_L t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ -\partial_x w \\ \partial_x v \end{pmatrix} \neq 0$ . Les particules matériel-

les sont donc mises en rotation lors du passage de l'onde (dans le schéma ci-dessous, la rotation est illustrée par le mouvement des petits « moulinets » (petites croix), supposés incrustés rigidement dans le milieu continu).

- Les ondes S sont des ondes de cisaillement (*Shearing* en anglais). Les plans matériels perpendiculaires à  $x$  glissent les uns sur les autres dans les directions  $y$  et  $z$  et les déplacements sont transversaux : on dit que le solide est cisailé.



- Le rapport des vitesses longitudinale et transversale est donné par :

$$\frac{c_L^2}{c_T^2} = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{2\rho(1+\nu)}{E} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} = \frac{1}{1-2\nu} + 1$$

Or, vu (5.4.21), on a les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} -1 < \nu < \frac{1}{2} & 0 < \nu < \frac{1}{2} \\ -1 < -2\nu < 2 & -1 < -2\nu < 0 \\ 0 < 1-2\nu < 3 & 0 < 1-2\nu < 1 \\ \frac{1}{3} < (1-2\nu)^{-1} < \infty & 1 < \frac{1}{1-2\nu} < \infty \\ \frac{4}{3} < \frac{c_L^2}{c_T^2} = 1 + \frac{1}{1-2\nu} < \infty & 2 < \frac{c_L^2}{c_T^2} = 1 + \frac{1}{1-2\nu} < \infty \end{array}$$

On déduit donc que les ondes longitudinales sont les plus rapides<sup>12</sup>, puisque

$$c_L > \sqrt{\frac{4}{3}}c_T \qquad c_L > \sqrt{2}c_T$$

En séismologie, l'écart de temps  $\Delta t$  entre la perception des ondes volumiques P et S permet de déterminer la distance  $L$  à laquelle se situe l'épicentre. On a en effet

$$\Delta t = L \left( \frac{1}{c_T} - \frac{1}{c_L} \right)$$

- L'ordre de grandeur des vitesses de propagation dans le fer est donné par

$$\begin{cases} c_L = 7 \text{ km/s} \\ c_T = 3.2 \text{ km/s} \end{cases}$$

- On peut également déterminer la relation de dispersion des ondes P ou S en injectant une solution du type  $A \sin(kx - \omega t)$  dans les équations (5) et (8). En raisonnant à partir de la forme générale (10), avec  $c = c_L$  ou  $c_T$ , la condition pour qu'il existe une solution non triviale de ce type s'écrit

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0$$

On en déduit donc la valeur de la vitesse de phase des ondes est donnée par

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c = \text{constante}$$

Le milieu est donc non dispersif (on le savait en fait déjà vu la forme générale (11) des solutions !).

- Il est intéressant de souligner que l'étude qui vient d'être faite pour les ondes planes peut se généraliser de la manière suivante. On peut montrer que *dans un milieu infini*, on peut toujours séparer une onde quelconque  $\mathbf{u}$  en une onde  $\mathbf{u}^P$  irrotationnelle et une onde  $\mathbf{u}^S$  indivergente, se propageant *indépendamment* l'une de l'autre et avec des vitesses respectives égales à  $c_L$  et  $c_T$ .

En revanche, si le milieu est borné, le découplage d'une onde en  $\mathbf{u}^P$  et  $\mathbf{u}^S$  n'est plus possible en général. Les conditions aux limites ne peuvent en effet pas être satisfaites indépendamment par  $\mathbf{u}^P$  et par  $\mathbf{u}^S$ , ce qui impose le couplage de ces deux composantes. On peut voir également que les conditions aux limites donnent lieu à des phénomènes de réflexion et de réfraction qui modifient le type (P ou S) des ondes incidentes (par exemple, une onde incidente P arrivant à une frontière donnera naissance à une onde réfléchie et à une onde réfractée, toutes deux constituées d'une onde P *et* d'une onde S). Enfin, signalons que l'on peut montrer que les lois habituelles de la réflexion et de la réfraction (rapport du sinus des angles égal au rapport des vitesses) sont également valables pour les ondes élastiques.

<sup>12</sup> « P » pour premières et « S » pour secondes !

- Pour terminer, mentionnons encore qu'outre les ondes volumiques qui viennent d'être étudiées, d'autres types d'ondes peuvent se propager à *la frontière* d'un milieu élastique. Ces ondes portent le nom d'ondes de surface de Rayleigh et leur amplitude décroît très rapidement avec la profondeur (la distance à la frontière).

# 6 Introduction à la thermo-mécanique des fluides

## 6.1 Définition des fluides – Pression et tensions visqueuses

Les fluides<sup>1</sup>, c'est-à-dire les liquides et les gaz, peuvent être définis de manière très générale comme des matériaux qui sont incapables de résister à une contrainte de cisaillement, aussi petite soit-elle, sans se mettre en mouvement.

Dans une base donnée, l'existence de tensions de cisaillement se traduit par l'apparition de composantes différentes de zéro en dehors de la diagonale du tenseur des tensions. Ainsi donc, la définition choisie ci-dessus impose que dans un fluide au repos, les composantes non diagonales du tenseur des tensions soient nulles dans toute base. Cela n'est possible que si le tenseur des tensions est un tenseur isotrope que l'on peut alors écrire sous la forme

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (6.1.1)$$

où

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad (6.1.2)$$

est la *pression* dans le fluide au repos<sup>2</sup>.

En particulier, lorsqu'un fluide est à l'équilibre thermodynamique<sup>3</sup>, il est évidemment au repos<sup>4</sup> et on peut lui associer une « pression d'équilibre »  $p$ . Dans ce cadre thermodynamique, la pression  $p$  est une variable dépendante qui est déterminée par une

---

<sup>1</sup> Le modèle de fluide parfait trouve ses origines dans la 2<sup>ème</sup> moitié du XVIII<sup>ème</sup> siècle (Euler, Lagrange, d'Alembert). Le modèle de fluide visqueux date quant à lui du milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle (cas simples 1-D déjà considérés par Newton (1687), cas général 3-D développé par Navier (1821), Poisson (1831), Stokes (1845)).

<sup>2</sup> Dans les fluides,  $1/3\sigma_{kk}$  est le plus souvent négatif (voir Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*, p.54).

<sup>3</sup> Au sens strict, la notion d'équilibre thermodynamique ne se rapporte qu'à des systèmes homogènes (Rappelons qu'un système est dit homogène si toutes les variables qui le caractérisent (pression, température, ...) sont uniformes spatialement. Cette notion ne doit pas être confondue avec la notion de milieu continu, ou matériau, homogène qui est un matériau fait d'un seul constituant). Ces systèmes homogènes ne peuvent donc être soumis à aucune force extérieure qui pourrait les rendre non homogènes (comme par exemple la gravité qui rend non homogène la densité des matériaux compressibles). Il est cependant intéressant d'étendre quelque peu la définition de l'équilibre thermodynamique pour pouvoir prendre en compte ce genre de situations. Nous admettons ici qu'un fluide soumis à des forces extérieures est à l'équilibre s'il n'effectue aucun échange de chaleur ou de travail avec le monde extérieur et si toutes les variables définissant son état sont indépendantes du temps.

<sup>4</sup> S'il n'était pas au repos, les frottements internes donneraient naissance à des échauffements incompatibles avec la notion d'équilibre thermodynamique.

« équation d'état » permettant d'exprimer cette quantité en fonction de « l'état du système », c'est-à-dire, par exemple, en fonction de la température  $T$  et de la densité  $\rho$  dans les cas les plus simples. Une analyse plus détaillée des équations d'état sera développée dans le § 6.5 et nous ne spécifierons pas davantage ici l'expression, supposée donnée, de la pression d'équilibre  $p$  en fonction des autres variables définissant l'état du système.

On peut alors séparer le tenseur des tensions en cette pression thermodynamique d'équilibre à laquelle s'ajoutent les tensions de non-équilibre<sup>5</sup> engendrées par le fait que le système n'est plus à l'équilibre. En faisant l'hypothèse que, dans un fluide, seuls les mouvements engendrent des tensions de non-équilibre, on peut décomposer le tenseur des tensions total en sa composante de pression d'équilibre et ce que l'on appelle les *tensions visqueuses* engendrées par le mouvement. On écrit donc

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^v \quad (6.1.3)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^v$  désigne le tenseur des tensions visqueuses. Notons encore qu'il est parfois intéressant de séparer la trace et la partie déviatorique du tenseur des tensions visqueuses. Avec des notations claires, on écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - p^v\mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^v \quad (6.1.4)$$

où  $p^v = -\frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^v$  désigne la « pression visqueuse ».

Avec ces notations, les équations d'évolution pour les fluides s'écrivent :

- CONSERVATION DE LA MASSE

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.1.5)$$

- CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT (1<sup>ERE</sup> LOI DU MOUVEMENT DE CAUCHY)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{b} - \nabla p - \nabla p^v + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^v \quad (6.1.6)$$

- CONSERVATION DU MOMENT CINETIQUE (2<sup>EME</sup> LOI DU MOUVEMENT DE CAUCHY)

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^v = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{vT} \quad (6.1.7)$$

- CONSERVATION DE L'ENERGIE INTERNE

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r - p\nabla \cdot \mathbf{v} - p^v\nabla \cdot \mathbf{v} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^v : \hat{\mathbf{V}} \quad (6.1.8)$$

- EQUATION DE BILAN DE L'ENTROPIE

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma_s \quad (6.1.9)$$

---

<sup>5</sup> Cette séparation des tensions en tensions d'équilibre et tensions de non-équilibre est typique, non seulement de la mécanique des fluides, mais plus généralement de tous les domaines de la mécanique des milieux continus où des phénomènes de non-équilibre se manifestent (étude de la plasticité p.ex.).

## 6.2 Le fluide newtonien

### EQUATION CONSTITUTIVE

Nous avons indiqué dans le § 2.6 que les forces de surface qui naissent entre 2 particules matérielles fluides voisines trouvent leur origine dans le fait que ces 2 particules se déplacent avec des vitesses distinctes. De manière plus précise, nous avons vu que les variations spatiales du champ des vitesses dans le voisinage d'un point pouvaient être décomposées en deux contributions. L'une permet de rendre compte de la rotation d'ensemble du voisinage de ce point et n'engendre aucun « frottement » entre particules voisines. La deuxième contribution se rapporte quant à elle aux déformations du voisinage du point et, au travers des « frottements » qu'elle implique, doit être considérée comme étant à l'origine des tensions qui apparaissent dans un fluide en mouvement.

De manière générale, nous allons admettre que dans les cas les plus simples, le tenseur des tensions visqueuses  $\sigma^v$  peut s'exprimer en fonction du tenseur taux de déformation  $\mathbf{V}$  défini en (2.6.3). En limitant la portée de notre analyse à des gradients de vitesse qui restent « petits », le tenseur des tensions visqueuses peut s'écrire comme une fonction linéaire du tenseur taux de déformation. Comme les tensions visqueuses doivent en outre s'annuler lorsque le tenseur taux de déformation est nul, la fonction est homogène. On suppose donc :

$$\sigma^v_{ij} = a_{ijkl} V_{kl} \quad (6.2.1)$$

Les  $a_{ijkl}$  sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4. Si le matériau étudié n'est pas homogène, il faut admettre que ses propriétés peuvent varier d'une particule matérielle à l'autre et les quantités  $a_{ijkl}$  peuvent dépendre de la particule matérielle. Pour les fluides homogènes que nous considérons, ce tenseur peut éventuellement dépendre de quantités telles que la masse volumique ou la température<sup>6</sup>. Remarquons aussi que  $a_{ijkl}$  doit être symétrique sur ses 2 premiers indices. Il peut aussi sans restriction être supposé symétrique sur ses deux derniers indices puisque le tenseur taux de déformation l'est.

Si l'on suppose en outre que le fluide est isotrope, on obtient l'équation constitutive du « fluide newtonien » :

$$\sigma^v_{ij} = \lambda V_{kk} \delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \quad (6.2.2)$$

En séparant la trace et la partie déviatorique (voir (6.1.4)), on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^v_{ij} &= 2\mu \hat{V}_{ij} \\ p^v &= -\kappa \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

<sup>6</sup> Il est évidemment indépendant de la vitesse, car on a admis que seules les *variations* de vitesse entre particules matérielles voisines pouvaient engendrer des tensions.

où  $\mu$  est la viscosité (dynamique<sup>7</sup>) de cisaillement du fluide et  $\kappa = \lambda + 2/3\mu$  sa viscosité (dynamique) volumique. Ces deux paramètres peuvent éventuellement dépendre de  $T$  et  $\rho$ .

Le tenseur des tensions (total) d'un fluide newtonien s'écrit donc

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} + 2\mu \hat{\mathbf{V}} \quad (6.2.4)$$

On peut remarquer que, dans un fluide incompressible, la pression visqueuse est toujours nulle (la viscosité volumique est alors indéterminée et disparaît de l'équation). Notons aussi que c'est une hypothèse assez courante et commode (hypothèse « de Stokes ») que de supposer nulle la viscosité volumique. Cette hypothèse est en assez bon accord avec de nombreux résultats expérimentaux. On peut en outre montrer en théorie cinétique des gaz qu'elle est rigoureusement valable pour les gaz parfaits.

## CONDITIONS AUX LIMITES

---

### 1 *Le long d'une paroi solide*

Lorsqu'un fluide visqueux est en contact avec une paroi solide supposée imperméable, on admet que le fluide ne peut rentrer dans la paroi ni glisser le long de celle-ci. La vitesse du fluide en contact avec la paroi est donc égale à la vitesse, supposée connue, de cette paroi. En appelant *interface* la surface géométrique de séparation entre la paroi et le fluide, on a donc :

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}}(P) = \mathbf{v}_{\text{paroi}}(P) \text{ pour tout point } P \text{ appartenant à l'interface.} \quad (6.2.5)$$

En particulier, si la paroi est au repos, on a

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}}(P) = 0 \text{ pour tout point } P \text{ appartenant à l'interface.} \quad (6.2.6)$$

### 2 *Le long d'une surface de séparation entre deux fluides non miscibles*

Pour décrire les mouvements de deux fluides non miscibles en contact, il faut résoudre les équations de la mécanique des milieux continus dans les deux milieux et exprimer des conditions aux limites le long de la surface de séparation entre ces deux fluides. Notons cependant que cette interface entre les deux fluides peut éventuellement se déformer sous l'effet du mouvement. En général, la position de cette surface constitue donc une nouvelle inconnue du problème pour laquelle une nouvelle équation d'évolution va devoir être introduite.

Les conditions aux limites qu'il convient d'utiliser expriment, d'une part, la continuité du champ des vitesses au travers de l'interface et, d'autre part, une condition d'équilibre sur les tensions exercées le long de l'interface entre les deux fluides.

En utilisant des indices 1 et 2 pour différencier les deux fluides, la continuité des vitesses se traduit par

$$\mathbf{v}_1(P) = \mathbf{v}_2(P) \text{ pour tout point } P \text{ appartenant à l'interface.} \quad (6.2.7)$$

---

<sup>7</sup> La viscosité cinématique  $\nu$  est définie par  $\nu = \mu / \rho$ .

Cette équation projetée sur la normale à l'interface rend compte du caractère non miscible des deux fluides qui ne peuvent s'interpénétrer. Les deux composantes tangentielles expriment quant à elles que les deux fluides, visqueux, ne peuvent glisser l'un sur l'autre.

La condition se rapportant aux tensions le long de l'interface peut s'obtenir de la manière suivante. Considérons une portion infinitésimale  $dS$  de l'interface entre les fluides 1 et 2 centrée sur le point  $P$  (Fig. 6.2). Construisons alors autour de  $dS$  un petit cylindre droit de hauteur  $2h$  et parallèle à  $\mathbf{n}$ , la normale à l'interface en  $P$ , extérieure pour le fluide 1. Exprimons le principe de conservation de la quantité de mouvement pour ce cylindre en faisant tendre sa hauteur vers zéro. A la limite, le terme d'inertie ainsi que les forces extérieures disparaissent de l'équation car ces deux quantités tendent vers zéro avec  $h$ . Les forces de surfaces s'exerçant sur la surface latérale du cylindre disparaissent également lorsque le cylindre s'aplatit. Il ne reste donc que les forces de surface s'exerçant sur les bases  $dS_1$  et  $dS_2$ , tendant toutes deux vers  $dS$ . Il vient donc :

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \mathbf{n}_1 \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 dS_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 dS_2 \right] \quad (6.2.8)$$

$$= \mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_2 - \underline{\underline{\sigma}}_1) dS$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement impose donc la condition suivante pour les tensions le long de l'interface :

$$\mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_2 - \underline{\underline{\sigma}}_1) = 0 \text{ en tous les points de l'interface} \quad (6.2.9)$$

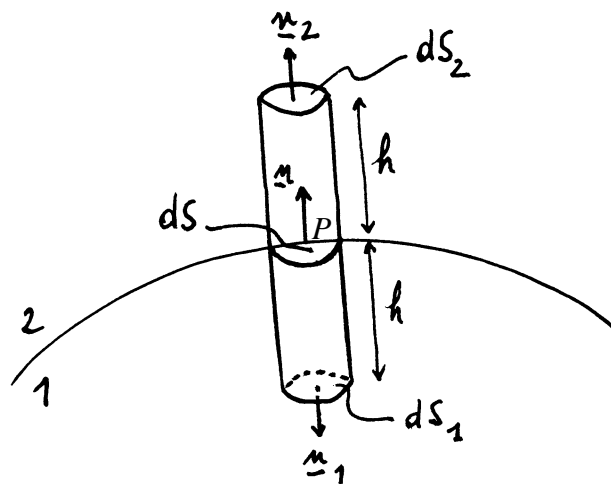


Fig. 6.2

Le raisonnement développé ci-dessus n'est bien sûr valable que si les phénomènes de tension superficielle peuvent être négligés. On sait en effet (voir l'annexe présentée dans le paragraphe 6.12) qu'une interface entre 2 milieux se comporte généralement comme une membrane élastique tendue et que des forces tangentes à la surface s'exercent perpendiculairement à toute ligne tracée sur cette surface. Sur ces lignes, la force par unité de longueur  $\xi$  qui apparaît dans l'interface est appelée *tension superficielle*, ou *tension de surface*. Elle varie en

général avec la température et avec les concentrations des différents constituants en présence. L'origine microscopique de cette force peut s'expliquer en considérant les forces intermoléculaires dans le voisinage de la surface.

Si la tension superficielle est prise en compte et si l'on suppose que celle-ci est uniforme dans l'interface, on peut montrer que (6.2.9) doit alors s'écrire :

$$\mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_2 - \underline{\underline{\sigma}}_1) + \xi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} = 0 \text{ en tous les points de l'interface} \quad (6.2.10)$$

où les  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons principaux de courbure de l'interface (ces rayons sont positifs ou négatifs suivant que le vecteur  $\mathbf{n}$  pointe ou non vers la concavité de la section normale qui leur correspond). Notons encore que le terme proportionnel à  $\xi$  dans (6.2.10) est souvent appelé *pression capillaire* et que la relation de définition de cette quantité est connue sous le nom de formule de Laplace.

La détermination de la position de l'interface est basée sur le *postulat* suivant. Nous allons admettre qu'au cours du temps, ce sont toujours les mêmes particules matérielles qui se trouvent le long de l'interface. Ecrivons alors sous la forme suivante l'équation cartésienne que l'on doit déterminer pour l'interface :

$$\Sigma(x, y, z, t) = 0 \quad (6.2.11)$$

Si l'on admet qu'une particule se trouvant à un instant donné sur l'interface y reste par la suite, la fonction  $\Sigma$  évaluée sur les coordonnées de cette particule garde une valeur constante (égale d'ailleurs à 0) au cours du temps. Ainsi, la dérivée matérielle de  $\Sigma$  est égale à zéro pour les particules se trouvant à l'interface. La fonction inconnue  $\Sigma$  est donc définie par l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{d\Sigma(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Sigma = 0 \text{ sur l'interface} \quad (6.2.12)$$

Notons enfin que, dans certains cas, on peut simplifier ce qui précède en considérant le modèle d'une « surface libre ». Imaginons par exemple que le fluide 2 est un fluide beaucoup moins visqueux que le fluide 1 et que l'on ne s'intéresse pas réellement à son mouvement. On pourra alors remplacer les conditions de continuité de la vitesse (6.2.7) et d'équilibre des tensions à l'interface (6.2.10) par les conditions suivantes :

$$\mathbf{n} \cdot (-p_2 \mathbf{I} - \underline{\underline{\sigma}}_1) + \xi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} = 0 \text{ en tous les points de l'interface} \quad (6.2.13)$$

où  $p_2$  est la pression supposée donnée dans le fluide 2. Cette condition est souvent utilisée lorsqu'un des deux fluides en contact à l'interface est un gaz.

## 6.3 Le fluide parfait

### EQUATION CONSTITUTIVE

---

Le modèle de *fluide parfait* est caractérisé par l'annulation du tenseur des tensions visqueuses.

$$\underline{\underline{\sigma}}^v = 0 \quad (6.3.1)$$

Les seules contraintes qui peuvent exister au sein d'un tel matériau sont donc des efforts de pression. Pour un tel fluide, l'équation de conservation de la quantité de mouvement porte le nom d'*équation d'Euler* et s'écrit :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \nabla p \quad (6.3.2)$$

Ce modèle de fluide parfait sera utilisé dans l'étude de quelques problèmes pour lesquels les phénomènes de frottements au sein du fluide en écoulement peuvent être négligés en première approximation.

### CONDITIONS AUX LIMITES

---

#### 1 Le long d'une paroi solide

Lorsqu'un fluide parfait s'écoule le long d'une paroi solide, on admet que ce fluide ne peut rentrer dans la paroi. En revanche, aucune condition n'est posée sur les glissements éventuels du fluide parfait tangentiellement à la paroi. On a donc

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{fluide}}(P) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{paroi}}(P) \text{ pour tout point } P \text{ appartenant à l'interface.} \quad (6.3.3)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal à la paroi. En particulier, si la paroi est au repos, on a

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{fluide}}(P) = 0 \text{ pour tout point } P \text{ appartenant à l'interface.} \quad (6.3.4)$$

#### 2 Le long d'une interface entre deux fluides parfaits

Les conditions aux limites à appliquer au travers de l'interface entre deux fluides parfaits se déduisent aisément de celles décrites pour les fluides newtoniens. Au lieu de (6.2.7), on n'impose pour les fluides parfaits que la continuité de la vitesse *normale* à l'interface, en n'interdisant pas un glissement éventuel :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1(P) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2(P) \text{ pour tout point } P \text{ appartenant à l'interface} \quad (6.3.5)$$

La condition d'équilibre des tensions au travers de l'interface s'obtient directement à partir de (6.2.10) en identifiant le tenseur des tensions à sa seule composante de pression. Il vient donc :

$$\mathbf{n} \left( p_1 - p_2 + \xi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) = 0 \text{ en tous les points de l'interface}^8 \quad (6.3.6)$$

L'équation de l'interface est donnée par (6.2.12).

---

<sup>8</sup> On ne peut simplifier le facteur  $\mathbf{n}$  dans cette équation car le signe des rayons de courbure en dépend.

## 6.4 Loi de Fourier et conduction thermique

### EQUATION CONSTITUTIVE

---

Pour que le système d'équations décrivant un milieu continu soit complet, il convient de proposer également une équation constitutive pour le flux de chaleur  $\mathbf{q}$ .

L'expérience montre que ce sont les différences de température qui engendrent les flux de chaleur. Si les gradients de température sont suffisamment « petits », les flux de chaleur peuvent s'écrire comme des fonctions linéaires de ces gradients. Dans le cas isotrope, la loi bien connue de Fourier (1822) exprime la proportionnalité entre le flux de chaleur local et le gradient de température :

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (6.4.1)$$

où  $k$  est la conductivité thermique du milieu considéré (qui peut éventuellement dépendre de la température ou de la densité). Dans le cas de matériaux non isotropes, le facteur du gradient de température est un tenseur d'ordre 2 (une matrice  $k_{ij}$ ).

Soulignons enfin que cette équation constitutive est tout aussi valable dans les solides que dans les fluides (nous ne l'avons pas introduite lors de l'étude des solides élastiques car nous avons choisi dans le paragraphe 5.2 de limiter notre étude "aux effets mécaniques"). Notons aussi qu'elle doit être complétée par une équation d'état définissant le champ de température.

### CONDITIONS AUX LIMITES

---

Il existe de nombreux types de conditions aux limites permettant de décrire les échanges thermiques aux frontières d'un milieu continu. A titre d'exemple, on peut considérer le cas où la température du milieu continu étudié est fixée le long d'une frontière, par mise en contact avec une paroi de température supposée connue. On aura alors une condition du type :

$$T_{\text{milieu continu}}(P) = T_{\text{paroi}}(P) \text{ pour tout } P \text{ appartenant à l'interface} \quad (6.4.2)$$

où  $T_{\text{paroi}}(P)$  est une fonction supposée donnée.

## 6.5 Brève introduction à la Thermodynamique Classique d'Onsager-Prigogine : Description thermodynamique du fluide de Newton-Fourier isotrope

Nous avons vu (§§ 3.9 et 6.1) que les équations d'évolution doivent être complétées par des équations d'état et des équations constitutives. Dans les paragraphes précédents, nous avons montré comment des raisonnements phénoménologiques permettaient de déduire la loi constitutive du fluide newtonien ainsi que la loi de Fourier. Les équations d'état n'ont cependant pas encore été introduites.

Nous allons indiquer dans ce paragraphe comment la Thermodynamique des Phénomènes Irréversibles (TPI) permet d'introduire ces équations d'état et comment elle permet également de présenter d'une manière théorique élégante les équations constitutives déduites de manière phénoménologique dans ce qui précède.

La TPI se distingue de ce que l'on appelle habituellement la Thermodynamique par le fait qu'elle s'intéresse à la description de processus d'évolution. Nous avons déjà souligné que l'appellation « Thermostatique » serait sans doute plus appropriée pour décrire cette Thermodynamique qui étudie avant tout les systèmes se trouvant à l'équilibre, ou éventuellement les systèmes qui sont le siège d'évolutions réversibles. Dans de tels systèmes à l'équilibre, les variables d'état sont des caractéristiques de **l'ensemble** de la matière étudiée<sup>9</sup>. Ainsi, les variables d'état de la thermostatique sont, par exemple, le volume total du corps étudié, son entropie (totale), sa température ou encore sa pression. L'objet principal de la thermostatique est alors l'étude des relations qui relient entre elles ces variables *globales* caractérisant le système dans son entier.

Lorsque l'on étudie des systèmes en évolution<sup>10</sup>, il est clair que des variables d'état globales sont insuffisantes pour rendre compte de manière précise d'une évolution. On conçoit aisément que les variables d'état d'un système en évolution varient non seulement dans le temps, mais aussi dans l'espace. En fin de compte, c'est chaque particule matérielle du milieu continu étudié qui doit être caractérisée par un certain nombre de variables d'état. La TPI tente de déterminer quelles sont ces variables d'état et quelles sont les lois qui régissent leur évolution. En ce sens, la description générale des milieux continus que nous avons développée dans les chapitres 1 à 3 constitue le point de départ de toute théorie des phénomènes irréversibles. Il importe cependant de faire remarquer qu'il existe plusieurs cadres théoriques qui revendiquent le nom de TPI. Les différentes approches se distinguent par leur manière d'introduire et de décrire les équations d'états et les équations constitutives, c'est-à-dire par leur manière de rendre compte des comportements propres des différents types de matériaux. Chacune de ces théories des phénomènes irréversibles repose sur des hypothèses qui lui sont plus ou moins propres et qui déterminent également les limitations de la démarche.

Dans ce cours, nous voudrions esquisser très brièvement les idées de base de la plus ancienne de ces théories, appelée traditionnellement Thermodynamique Classique d'Onsager-Prigogine<sup>11</sup>.

Le postulat le plus fondamental de la Thermodynamique Classique est « l'hypothèse de l'équilibre local ». Cette hypothèse consiste à supposer que, dans un milieu en évolution, la thermodynamique au niveau local, c'est-à-dire au niveau des particules matérielles, n'est rien d'autre que la transposition pure et simple de la thermostatique. Les lois locales régissant la thermodynamique des particules matérielles sont les lois bien connues de la thermostatique d'équilibre. L'hypothèse de l'équilibre local peut aussi s'interpréter en disant que pendant tout

---

<sup>9</sup> Rappelons (*cf.* note 3 p. 106) qu'au sens strict, un système à l'équilibre thermodynamique ne peut être soumis à aucune force extérieure qui le rendrait non homogène.

<sup>10</sup> Ou, simplement, soumis à des forces extérieures.

<sup>11</sup> Onsager (1931), Prigogine (1947).

processus évolutif, les particules matérielles d'un milieu continu restent dans un état « d'équilibre interne » tout en étant éventuellement dans un état de non-équilibre par rapport à leurs voisines.

Examinons à présent de manière plus précise le contenu de ce postulat. L'hypothèse de l'équilibre local implique tout d'abord que les variables thermodynamiques locales sont les mêmes que les variables globales décrivant les équilibres thermostatiques. Ainsi par exemple, on sait qu'un fluide homogène est décrit en thermostatique par 2 variables indépendantes que l'on peut choisir comme étant l'énergie interne et le volume occupé par la masse de fluide. En conséquence, les variables d'état thermodynamiques locales utilisées pour décrire un fluide en évolution seront la densité (massique) d'énergie interne  $u$  et l'inverse de la masse volumique  $\rho$  que l'on écrira  $v$  (« volume massique »).

L'hypothèse de l'équilibre local signifie en outre que les relations entre les variables thermodynamiques locales sont les mêmes qu'à l'équilibre thermostatique. Ainsi, si la relation fondamentale exprimant en thermostatique l'entropie  $S$  en fonction de l'énergie interne (totale)  $U$  et du volume  $V$  s'écrit<sup>12</sup>

$$S = f(U, V), \quad (6.5.1)$$

alors la relation fondamentale correspondante exprimant la densité massique d'entropie  $s$  en fonction des variables locales  $u$  et  $\rho$  s'écrit

$$s = f(u, v) \text{ avec } v = \rho^{-1} \quad (6.5.2)$$

où la fonction  $f$  est la **même** que celle qui apparaît dans (6.5.1). En utilisant le même symbole pour les fonctions et leurs valeurs, cette fonction  $f$  est souvent notée  $S$  en thermostatique et  $s$  en thermodynamique. À la place de (6.5.2), on écrit donc :

$$s = s(u, v) \text{ avec } v = \rho^{-1} \quad (6.5.3)$$

En conséquence, la loi de Gibbs pour un système en évolution s'écrit de la même manière qu'en thermostatique :

$$ds = T^{-1} du + pT^{-1} dv \quad (6.5.4)$$

où  $T$  et  $p$  désignent la température et la pression locales :

$$T^{-1} = \frac{\partial s(u, v)}{\partial u} \quad ; \quad pT^{-1} = \frac{\partial s(u, v)}{\partial v} \quad (6.5.5)$$

Ces deux relations constituent les lois d'état exprimant la pression et la température en fonction de l'énergie interne et de la masse volumique. Elles servent par exemple à exprimer la pression en fonction de  $u$  et  $\rho$  dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Elles permettent également de calculer la température lorsque les équations de conservation ont été résolues<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> La fonction  $f$  est homogène du premier ordre :  $f(\lambda U, \lambda V) = \lambda f(U, V)$ , pour tout  $\lambda$ .

<sup>13</sup> Parce qu'elles définissent clairement la notion de « pression thermodynamique », elles permettent également de justifier la décomposition (6.1.3) des tensions en les tensions d'équilibre (ou réversibles) et les tensions de non-équilibre (irréversibles).

Il est clair que cette hypothèse de l'équilibre local mériterait d'être analysée plus en détail mais nous ne le ferons pas complètement ici. Notons seulement qu'il paraît assez naturel d'imaginer que le domaine de validité de la théorie se limite à la « proximité » de l'équilibre thermodynamique. De manière plus précise, on peut comprendre que pour qu'un état d'équilibre puisse s'installer localement à chaque instant, il faut que les phénomènes étudiés soient caractérisés par des fréquences pas trop élevées (ou que les systèmes étudiés soient caractérisés par des temps de relaxation suffisamment courts), afin que l'équilibre local « ait le temps » de s'installer à chaque instant de l'évolution. Ajoutons enfin que cette hypothèse de l'équilibre local peut aussi être justifiée microscopiquement au voisinage de l'équilibre dans le contexte de la théorie cinétique des gaz.

Après avoir introduit les équations d'état, nous allons à présent indiquer comment les équations constitutives pour les flux dissipatifs que sont le flux de chaleur et les tensions visqueuses peuvent être développées dans le cadre de la Thermodynamique Classique d'Onsager-Prigogine. Le raisonnement va principalement s'appuyer sur le second principe de la thermodynamique introduit dans le § 3.7

Avant de pouvoir exploiter le second principe de la thermodynamique (équation (3.7.5)), il faut tout d'abord disposer d'une équation constitutive pour le flux d'entropie  $\mathbf{J}_s$  ainsi que pour la production volumique d'entropie d'origine externe  $\sigma_s^e$ . Dans le cadre de la Thermodynamique Classique, l'expression de ces quantités s'obtient, à l'instar des équations d'état, par transposition au niveau local des relations décrivant en thermostatique les apports d'entropie en provenance du monde extérieur.

En thermostatique, ces apports (réversibles) d'entropie en provenance du monde extérieur à un système fermé<sup>14</sup> sont reliés aux échanges de chaleur par la relation bien connue

$$dS = \delta Q / T \quad (6.5.6)$$

où  $\delta Q$  représente la chaleur échangée à la température  $T$ .

En tenant compte que les apports de chaleur à une particule matérielle peuvent se faire au travers de sa surface ou directement dans la masse, on déduit donc par transposition de (6.5.6) au niveau local, c'est-à-dire au niveau d'une particule matérielle :

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{q}}{T} \quad \text{et} \quad \sigma_s^e = \frac{\rho r}{T} \quad (6.5.7)$$

Cette relation est ensuite introduite dans l'équation d'évolution de l'entropie. Il vient :

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \frac{\rho r}{T} + \sigma_s^i$$

La production d'entropie peut donc s'écrire

$$\sigma_s^i = \rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\rho r}{T} \quad (6.5.8)$$

<sup>14</sup> C'est-à-dire un système qui échange de l'énergie avec son voisinage mais pas de la matière.

En tenant compte de la relation fondamentale exprimant  $s$  en fonction de  $u$  et  $v$ , le premier terme du membre de droite peut se récrire :

$$\begin{aligned}\rho \frac{ds(u,v)}{dt} &= \rho \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_v \frac{du}{dt} + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_u \frac{dv}{dt} \right] \\ &= T^{-1} \left[ \rho \frac{du}{dt} - p \rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} \right]\end{aligned}$$

Grâce à l'équation d'évolution de l'énergie interne et à l'équation de continuité, on déduit que :

$$\rho \frac{ds(u,v)}{dt} = T^{-1} [(-\nabla \cdot \mathbf{q} + \sigma : \mathbf{V} + \rho r) + (p \nabla \cdot \mathbf{v})] \quad (6.5.9)$$

En injectant ce résultat dans (6.5.8), la production d'entropie devient :

$$\begin{aligned}\sigma_s^i &= T^{-1} [(-\nabla \cdot \mathbf{q} + \sigma : \mathbf{V} + \rho r) + (p \nabla \cdot \mathbf{v})] + \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\rho r}{T} \\ &= \mathbf{q} \cdot \nabla T^{-1} + T^{-1} (-p^v \nabla \cdot \mathbf{v} + \hat{\sigma}^v : \hat{\mathbf{V}})\end{aligned} \quad (6.5.10)$$

et le second principe de la thermodynamique fournit donc

$$\sigma_s^i = \mathbf{q} \cdot \nabla T^{-1} + T^{-1} (-p^v \nabla \cdot \mathbf{v} + \hat{\sigma}^v : \hat{\mathbf{V}}) \geq 0 \quad (6.5.11)$$

On voit que la production intérieure d'entropie<sup>15</sup> prend la forme d'une forme bilinéaire en les flux moléculaires  $\mathbf{q}$ ,  $p^v$  et  $\hat{\sigma}^v$  et les *forces thermodynamiques*  $\nabla T^{-1}$ ,  $-T^{-1} \nabla \cdot \mathbf{v}$  et  $T^{-1} \hat{\mathbf{V}}$  qui leur sont conjuguées.

À l'équilibre (ou pendant des évolutions réversibles), ces flux et ces forces sont tous nuls. En dehors de l'équilibre, on admet en Thermodynamique Classique que les flux peuvent être développés en termes des forces thermodynamiques, avec des coefficients qui dépendent des variables thermodynamiques telles que la température ou la masse volumique. Dans le contexte théorique le plus général, on admet que tous les flux dépendent de toutes les forces, mais dans ce qui suit nous nous limiterons au cas le plus simple pour lequel un flux ne dépend que de la force qui lui est conjuguée. Si on restreint par ailleurs son attention sur le voisinage immédiat de l'équilibre, on peut exprimer les flux comme des fonctions *linéaires* et homogènes des forces, avec des coefficients fonctions de  $\rho$  et  $T$ . Finalement, dans le cas où le milieu étudié est isotrope, on accepte les *relations phénoménologiques* suivantes<sup>16</sup> :

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \lambda \nabla T^{-1} \\ p^v &= -\alpha T^{-1} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \hat{\sigma}^v &= \beta T^{-1} \hat{\mathbf{V}}\end{aligned} \quad (6.5.12)$$

<sup>15</sup> Il est intéressant de remarquer que seules les tensions de non-équilibre (irréversibles) apparaissent dans l'expression de la production intérieure d'entropie.

<sup>16</sup> Dans le cas général, les coefficients sont des tenseurs (qui se réduisent à des multiples du tenseur unité dans le cas de matériaux isotropes).

où  $\lambda, \alpha, \beta$  sont des fonctions *a priori* quelconques de la température et de la masse volumique. On peut aussi récrire ces relations sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -k\nabla T \\ p^v &= -\kappa\nabla \cdot \mathbf{v} \\ \hat{\sigma}^v &= 2\mu\hat{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

en posant  $k = \lambda T^{-2}$ ,  $\kappa = \alpha T^{-1}$  et  $2\mu = \beta T^{-1}$ . Ces trois *coefficients phénoménologiques* sont des fonctions *a priori* quelconques de  $T$  et  $\rho$  qui doivent être déterminées par voie expérimentale pour chaque matériau. En comparant avec (6.2.3) et (6.4.1), on voit que ces quantités ne sont rien d'autre que ce que l'on a appelé la conductivité thermique, la viscosité volumique et la viscosité de cisaillement du fluide étudié.

En réintroduisant ces équations constitutives dans l'expression (6.5.11) du second principe de la thermodynamique, on déduit immédiatement

$$k \geq 0, \kappa \geq 0, \mu \geq 0. \quad (6.5.14)$$

On voit donc que le second principe de la thermodynamique impose que les coefficients de viscosité ainsi que la conductivité thermique sont des quantités positives. En particulier, la relation (6.5.13a) montre que le flux de chaleur est opposé au gradient de température, ce qui est bien en accord avec l'idée que la chaleur ne s'écoule spontanément que des zones chaudes vers les zones froides.

La démarche que nous venons de développer nous a permis de compléter les équations de bilan (6.1.5-9) au moyen d'équations d'état et d'équations constitutives afin de former un système « fermé » d'équations (autant d'équations que d'inconnues) pour décrire un milieu continu. Notons également que les « équations manquantes » que nous venons de présenter sont de nature essentiellement thermodynamique. Elles ne peuvent donc être introduites que dans le contexte d'une théorie thermodynamique des phénomènes irréversibles.

Nous avons donc présenté dans ce paragraphe la démarche de la Thermodynamique Classique d'Onsager-Prigogine. Rappelons que cette démarche théorique repose sur quelques hypothèses importantes qui déterminent évidemment les limitations de l'analyse. En particulier, l'hypothèse de l'équilibre local limite le domaine d'application de la théorie aux phénomènes à faible fréquence et aux matériaux à courts temps de relaxation. De plus, cette hypothèse, ainsi que le caractère linéaire des relations entre flux et forces thermodynamiques, restreignent la portée de la théorie aux phénomènes proches de l'équilibre. Les phénomènes plus généraux, ne satisfaisant pas aux hypothèses de la Thermodynamique Classique, ne peuvent être décrits quant à eux que dans le cadre d'autres théories thermodynamiques moins restrictives. Notons enfin pour terminer que, malgré ces restrictions, le domaine de validité de la Thermodynamique classique est extrêmement large dans la pratique.

## 6.6 Résumé des équations gouvernant l'évolution d'un fluide de Newton-Fourier isotrope

L'ensemble des équations décrivant un fluide de Newton-Fourier isotrope s'écrit :

- CONSERVATION DE LA MASSE

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.6.1)$$

- CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT (1<sup>ERE</sup> LOI DU MOUVEMENT DE CAUCHY)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \nabla p - \nabla p^v + \nabla \cdot \hat{\sigma}^v \quad (6.6.2)$$

- CONSERVATION DU MOMENT CINETIQUE (2<sup>EME</sup> LOI DU MOUVEMENT DE CAUCHY)

$$\hat{\sigma}^v = \hat{\sigma}^{vT} \quad (6.6.3)$$

- CONSERVATION DE L'ENERGIE INTERNE

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r - p \nabla \cdot \mathbf{v} - p^v \nabla \cdot \mathbf{v} + \hat{\sigma}^v : \hat{\mathbf{V}} \quad (6.6.4)$$

- EQUATION DE BILAN DE L'ENTROPIE

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma_s^e + \sigma_s^i \quad (6.6.5)$$

- EQUATIONS D'ETAT ET EQUATIONS CONSTITUTIVES

$$s = s(u, v) \text{ avec } v = \rho^{-1} \quad (6.6.6)$$

$$T^{-1} = \frac{\partial s(u, v)}{\partial u} \quad ; \quad pT^{-1} = \frac{\partial s(u, v)}{\partial v} \quad (6.6.7)$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{q}}{T} \text{ et } \sigma_s^e = \frac{\rho r}{T} \quad (6.6.8)$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad , \quad p^v = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \hat{\sigma}^v = 2\mu \hat{\mathbf{V}} \quad (6.6.9)$$

$$k = k(u, v) \geq 0 \quad , \quad \kappa = \kappa(u, v) \geq 0 \quad , \quad \mu = \mu(u, v) \geq 0 \quad . \quad (6.6.10)$$

Ce système (6.6.1-10) dans toute sa généralité est évidemment très complexe et l'on sera souvent amené à le simplifier si l'on désire le résoudre par voie analytique. Les simplifications que l'on fera dépendront des circonstances expérimentales que l'on veut décrire ainsi que des fluides que l'on modélise. Quelques hypothèses simplificatrices courantes sont par exemple l'hypothèse d'incompressibilité du fluide (dans la situation expérimentale étudiée), l'indépendance des coefficients de conductivité et de viscosité par

rapport à  $u$  et  $v$ . Parfois également, on ne s'intéressera qu'aux équations « mécaniques » en négligeant les « effets thermiques ».

Notons enfin que l'on appelle *équations de Navier-Stokes* les équations obtenues en substituant dans l'équation (6.6.2) de conservation de la quantité de mouvement les équations constitutives (6.6.9b et c) définissant les fluides visqueux. Ces équations s'écrivent :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \nabla p + \nabla(\kappa \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (2\mu \hat{\mathbf{V}}) \quad (6.6.11)$$

Pour un fluide incompressible, ou un fluide dont la viscosité volumique peut être négligée, on a aussi

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{V}). \quad (6.6.12)$$

Pour un fluide incompressible dont la viscosité est supposée constante, l'équation prend la forme suivante, qui sera souvent utilisée dans la suite :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}. \quad (6.6.13)$$

## 6.7 Applications : les fluides parfaits

L'EQUATION DE BERNOULLI (« HYDRODYNAMICA », 1738)

Si le fluide est parfait ( $\sigma^v = 0$ ), si les forces extérieures dérivent d'un potentiel  $\phi$ , si le fluide est incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ) et si l'écoulement est stationnaire,

Alors  $\frac{1}{2}v^2 + \phi + \frac{p}{\rho}$  est constant le long des lignes de courant.

À partir de l'équation d'Euler, on a

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{b} - \nabla p \\ &= -\rho \nabla \phi - \nabla p \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla \phi - \nabla \frac{p}{\rho}\end{aligned}$$

Multiplions scalairement par la vitesse :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= v_i v_k \partial_k v_i \\ &= v_k \partial_k \frac{1}{2} v_i^2 \\ &= \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right)\end{aligned}$$

d'où  $\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \phi + \frac{p}{\rho} \right) = 0$ , ce qui signifie que les surfaces iso- $\left( \frac{1}{2} v^2 + \phi + \frac{p}{\rho} \right)$  contiennent les lignes de courant. La quantité  $\frac{1}{2} v^2 + \phi + \frac{p}{\rho}$  est donc bien constante le long des lignes de courant (cf. interprétation du gradient).

Le théorème de Bernoulli admet une extension lorsque le fluide n'est pas incompressible mais que l'écoulement est barotrope. Un écoulement barotrope est défini par le fait que la pression ne dépend que de la densité :  $p = p(\rho)$ . Par exemple, un écoulement isotherme (ou qui peut être considéré comme tel) est barotrope<sup>1</sup>.

Si  $p = p(\rho)$  et en posant  $F(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho}$ , on a :

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho = F(\rho) \nabla \rho = \nabla \int F(\rho) d\rho = \nabla \int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho = \nabla \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

<sup>1</sup> S'il n'y a pas d'autres variables d'état que la température et la densité, la pression ne dépend évidemment que de  $\rho$  dans un écoulement isotherme.

Par un raisonnement similaire à celui qui a été fait ci-dessus, on déduit donc que la quantité

$$\frac{1}{2}v^2 + \phi + \int \frac{dp}{\rho}$$

est constante le long des lignes de courant.

Une autre extension est encore possible si l'écoulement est irrotationnel. Dans ces conditions, suivant que l'écoulement est barotrope ou que le fluide est incompressible, les quantités

$$\frac{1}{2}v^2 + \phi \begin{cases} + \int \frac{dp}{\rho} \\ + \frac{p}{\rho} \end{cases}$$

sont constantes dans tout l'écoulement.

En effet, si  $\nabla \wedge \mathbf{v} = 0$ , on a

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \phi - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (\text{Equation Euler stationnaire})$$

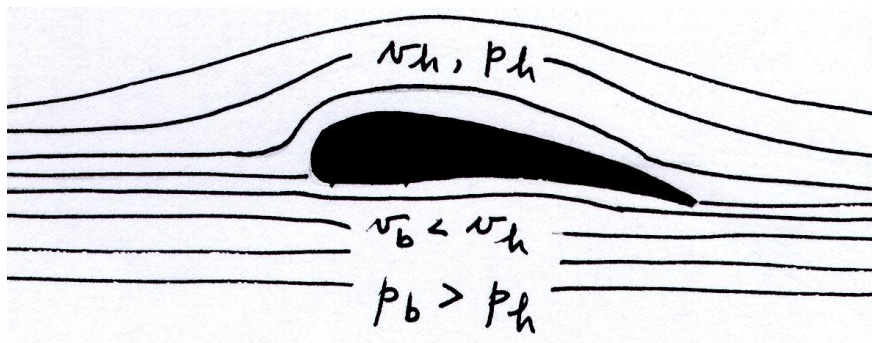
Grâce à l'identité vectorielle  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \nabla \frac{v^2}{2}$ , valable pour tout champ  $\mathbf{v}$ , on déduit alors que, si  $\nabla \wedge \mathbf{v} = 0$ ,

$$\nabla \frac{v^2}{2} = -\nabla \phi - \frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla \phi - \nabla \int \frac{dp}{\rho}$$

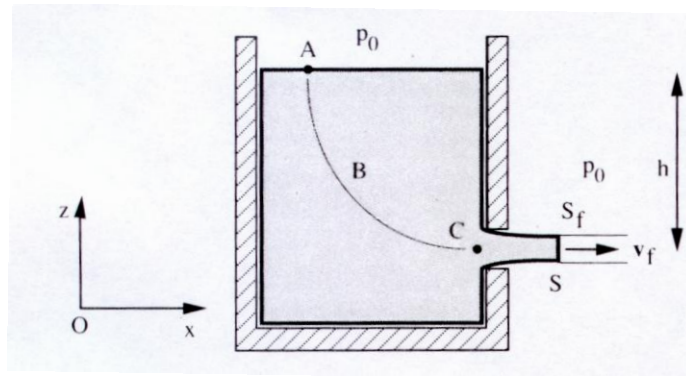
La relation  $\frac{1}{2}v^2 + \phi + \int \frac{dp}{\rho} = C^{\text{te}}$  constitue une intégrale première d'énergie (énergie cinétique + énergie potentielle + travail des forces surfaciques de pression).

Applications du théorème de Bernoulli :

- souffler entre deux feuilles de papier
- explication qualitative de la portance des ailes d'avion



- vitesse dans le jet de sortie d'un grand réservoir



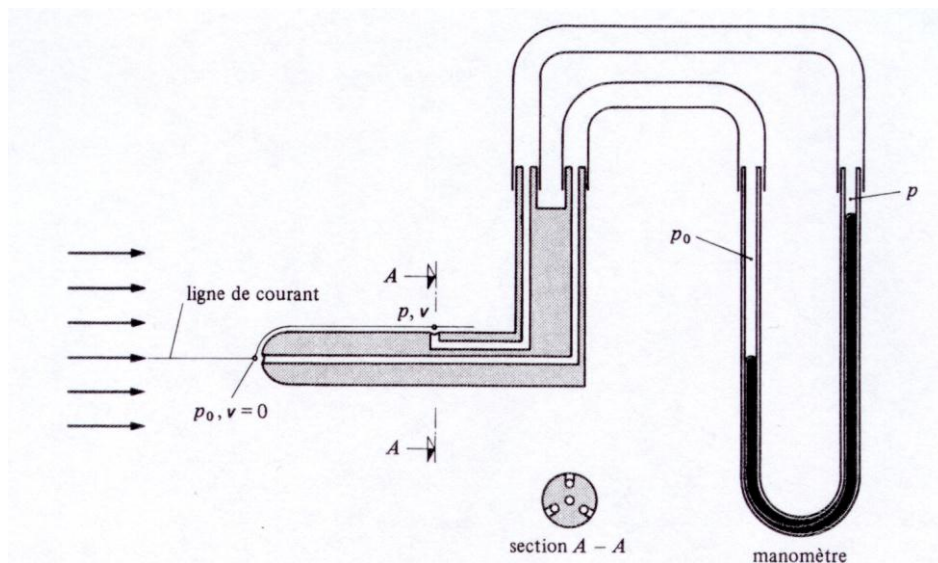
L'écriture de la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant telle que ABC représentée dans la figure ci-dessus donne

$$p_A + \rho g z_A = p_f + \frac{1}{2} \rho v_f^2 + \rho g(z_A - h)$$

Vu que  $p_A = p_f$ , on en déduit le « théorème de Torricelli<sup>2</sup> » :

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

- tube de Pitot : mesure de vitesse (avion, bateau)



Si l'indice  $\infty$  se rapporte aux quantités à l'infini amont (voir Figure ci-dessous), on a, en envisageant la ligne de courant s'arrêtant en la pointe du tube de Pitot et la ligne de courant passant dans le voisinage de A :

$$p_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} = p_0$$

$$p_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} = p_A + \rho \frac{U_A^2}{2}$$

<sup>2</sup> Noter que le résultat est indépendant de la direction de sortie du jet !

Si le tube est supposé mince, on a  $U_A \sim U_\infty$ . On déduit donc

$$\rho \frac{U_\infty^2}{2} = p_0 - p_A = \Delta p$$

- La relation de Bernoulli permet aussi de donner une explication sommaire du phénomène de cavitation. Si la vitesse d'un fluide augmente trop, la pression peut éventuellement devenir inférieure à la pression de vapeur saturante du liquide. Dans ces conditions, des bulles de vapeurs peuvent apparaître dans l'écoulement : c'est le phénomène de cavitation. L'implosion de ces bulles, par exemple au contact de parois, peut alors avoir des effets destructeurs très importants (érosion des hélices de bateaux ou de turbines hydrauliques, destruction de canalisation)<sup>3</sup>.

### LE THEOREME DE KELVIN

Avant d'énoncer le théorème de Kelvin, il faut tout d'abord introduire la notion de circulation  $\Gamma$  du champ des vitesses le long d'une courbe fermée  $C$ . Par définition, on a

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Rappelons aussi le théorème de Stokes, qui permet de transformer une telle intégrale sur un contour fermé en une intégrale sur la surface  $S$  délimitée par ce contour. Pour tout champ vectoriel  $\mathbf{v}$ , on a<sup>4</sup>

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} \, dS$$

Le théorème de Kelvin s'énonce alors de la manière suivante.

Dans un écoulement idéal et barotrope (ou aussi si le fluide est incompressible) soumis à un champ de force conservatif ( $\mathbf{b} = -\nabla\phi$ ), la circulation du vecteur vitesse le long d'une courbe qui se meut avec le fluide (c'est à dire d'une courbe matérielle) est constante :

$$\frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

On a en effet

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C(t)} v_i \cdot dx_i \\ &= \oint_{C_0} v_i \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Voir, p. ex., Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*, p. 54

<sup>4</sup> Rappelons les conventions habituelles de signe : la courbe  $C$  est parcourue « aire à gauche » et la normale à la surface  $S$  est fixée par la règle du tire-bouchon.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Gamma(t) &= \oint_{C_0} \frac{\partial}{\partial t} v_i(X,t) \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k + \oint_{C_0} v_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k \\
&= \oint_{C(t)} \frac{dv_i}{dt} dx_i + \oint_{C_0} \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial X_k} dX_k \\
&= \oint_{C(t)} \frac{dv_i}{dt} dx_i + \oint_{C_0} \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} dX_k \\
&= \oint_{C(t)} \frac{dv_i}{dt} dx_i + \oint_{C(t)} \frac{\partial \left( \frac{1}{2} v^2 \right)}{\partial x_j} dx_j
\end{aligned}$$

Or, par l'équation d'Euler, on a, en posant  $\pi = \int \frac{dp}{\rho}$ ,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi - \nabla \int \frac{dp}{\rho} = -\nabla(\phi + \pi)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Gamma(t) &= \oint_{C(t)} -\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi + \pi) dx_i + \oint_{C(t)} \frac{\partial \left( \frac{1}{2} v^2 \right)}{\partial x_i} dx_i \\
&= \oint_{C(t)} \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 - \phi - \pi \right) \cdot d\mathbf{r} \\
&= \oint_{C(t)} d \left( \frac{1}{2} v^2 - \phi - \pi \right) = 0
\end{aligned}$$

En conséquence, on a donc

$$\Gamma(t) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{constante}$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  est la vorticité du fluide.

Ainsi donc, si la vorticité est nulle à un instant donné partout dans un écoulement, elle le restera par la suite. En particulier, si un fluide parfait et barotrope est au repos en  $t = 0$ , tout écoulement qu'on peut y faire apparaître ne peut que rester irrotationnel par la suite<sup>5</sup>. Ce résultat est très important pour introduire ci-dessous la notion d'écoulement potentiel.

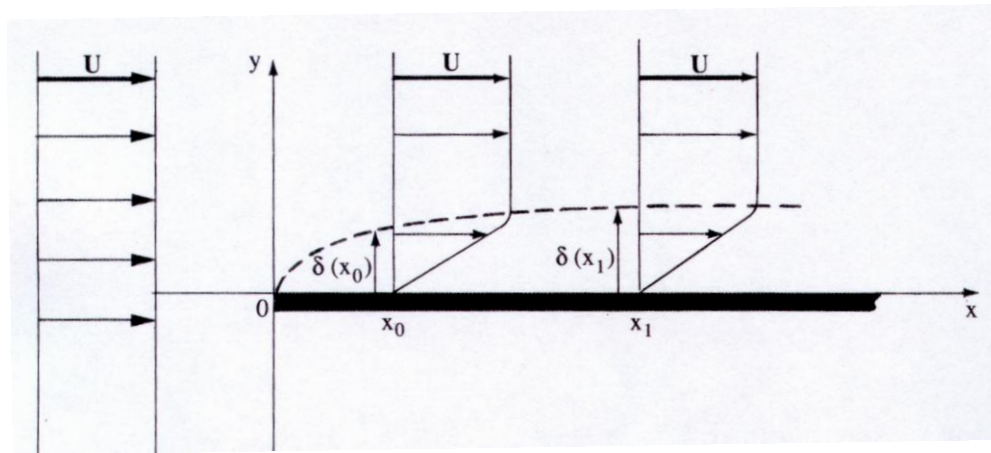
#### SOURCES DE VORTICITE DANS UN ECOULEMENT

Afin de bien cerner la portée du théorème de Kelvin, il est intéressant de se demander comment la vorticité peut être engendrée dans un écoulement (cf. les 3 hypothèses du Théorème de Kelvin)

<sup>5</sup> Les forces extérieures doivent aussi être conservatives.

## PHENOMENES DE VISCOSITE LE LONG DES PAROIS RIGIDES.

L'annulation de la vitesse le long des parois rigides engendre des gradients normaux de vitesse, et donc de la vorticité. Dans la Figure ci-dessous, on envisage un écoulement uniforme à l'infini amont qui rencontre en  $x = 0$  une plaque plane semi-infinie et infiniment mince. La couche dans laquelle la vitesse est notablement modifiée par la présence de la paroi s'appelle la *couche limite* et son épaisseur, fonction de la position le long de la surface de contact avec le fluide, est notée  $\delta(x)$ , où la coordonnées  $x$  est mesurée le long de la paroi. On peut montrer que l'épaisseur de la couche limite est d'autant plus petite que  $U$  est grand et que les objets solides plongés dans l'écoulement sont petits<sup>6</sup>. En dehors de la couche limite, le modèle de fluide parfait est acceptable mais le détail de l'écoulement à l'intérieur de la couche limite ne peut être décrit qu'en tenant compte de la viscosité du fluide. Il importe aussi de souligner que le fait que la couche limite soit mince n'implique pas que les phénomènes qui s'y passent ne sont pas importants, bien au contraire !



## FORCES DE VOLUME NON CONSERVATIVES

L'exemple le plus commun de force non conservative que l'on rencontre en hydrodynamique est sans doute la pseudo-force de Coriolis. Ainsi, dans l'hémisphère Nord, la rotation de la terre a pour effet de dévier vers la droite tout mouvement et d'engendrer par là de la rotation dans les écoulements (mouvement cyclonique). Un autre exemple est fourni par les forces magnétohydrodynamiques (Force de Lorenz s'exerçant sur les fluides porteurs de charges électriques).

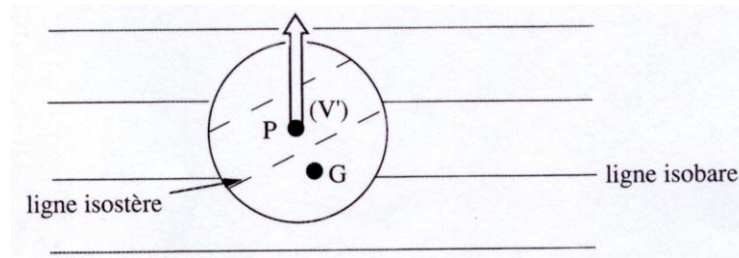
## ECOULEMENTS NON BAROTROPES

Imaginons une goutte sphérique (infinitésimale) dans un écoulement non barotrope, pour lequel les surfaces isobares ( $p = \text{cte}$ ) sont distinctes des surfaces isostères ( $\rho = \text{cte}$ ) (Voir Figure ci-dessous). La résultante des forces de pression (poussée d'Archimède)  $\vec{P}_A$  s'exerce<sup>7</sup> en un point  $P$  qui se trouve sur le diamètre de la goutte parallèle à  $\nabla p$  (dans le cas

<sup>6</sup> Dans le cas de la plaque de longueur infinie considérée dans la figure ci-dessous, l'épaisseur de la couche limite est d'autant plus grande que l'on est loin du "bord d'attaque".

<sup>7</sup> Dire que la poussée d'Archimède s'« exerce en le point  $P$  » signifie que le moment par rapport à ce point  $P$  des forces de pression qui s'appliquent sur les parois de la goutte est égal à zéro (la somme de ces forces étant égale à la poussée d'Archimède en question).

de la Figure, les isobares sont horizontales et la poussée d'Archimède est verticale, mais il faut insister sur le fait que les orientations des isobares et de cette poussée peuvent être tout à fait quelconques). La résultante des forces de pesanteur s'exerce quant à elle en le centre de gravité  $G$  déterminé par les surfaces isostères (voir figure). La combinaison de ces deux forces donne donc naissance à un couple qui tend à faire tourner la goutte et engendre de la vorticité.



### ÉCOULEMENTS POTENTIELS INCOMPRESSIBLES

Lorsqu'un écoulement est irrotationnel ( $\nabla \wedge \mathbf{v} = 0$ , partout et à tout instant), il est possible et intéressant de représenter le champ des vitesses du fluide étudié par un « potentiel » tel que

$$\mathbf{v} = \nabla \phi$$

L'introduction d'un tel potentiel des vitesses est en particulier possible lorsque l'on s'intéresse à une situation satisfaisant les hypothèses du théorème de Kelvin. Ainsi, l'écoulement d'un fluide parfait, barotrope, soumis uniquement à des forces conservatives et initialement au repos peut être décrit au moyen d'un tel potentiel.

Si en outre, le fluide est incompressible, on a  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . On en déduit donc que le potentiel des vitesses satisfait à l'équation bien connue de Laplace :

$$\Delta \phi = 0$$

Les conditions aux limites qu'il convient d'adjoindre à cette équation s'écrivent :

1)   la surface d'un corps solide immergé : imperméabilité ( $\mathbf{v}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_{\text{corps}} \cdot \mathbf{n}$ ), d'où la condition suivante pour le potentiel

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_{\text{corps}} \cdot \mathbf{n} \text{ en tout point de la surface du corps}$$

NB. Si le corps est au repos, on a évidemment  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$

2) si le domaine est infini : on doit supposer que la vitesse au loin est donnée. Si on étudie l'écoulement engendré par le déplacement d'un objet dans un fluide initialement au repos, on imposera une vitesse nulle à l'infini. Si on étudie le mouvement d'un fluide autour d'un objet fixe, il faudra imposer une vitesse uniforme loin de l'obstacle.

#### Unicité de solution

Si les conditions aux limites ci-dessus sont imposées, la solution est unique dans un domaine simplement connexe, c'est-à-dire un domaine tel que toute courbe fermée dans le domaine

peut être déformée et réduite continûment jusqu'à avoir une aire nulle tout en restant dans le domaine :

*Exemple d'un domaine simplement connexe* : espace entourant une sphère

*Contre-exemple*: espace entourant un tore ou un cylindre infiniment long

Si le domaine n'est pas simplement connexe, il faut spécifier  $\Gamma$  le long des courbes irréductibles pour rendre la solution unique<sup>8</sup>.

### **ÉCOULEMENT POTENTIEL 2D AUTOUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE DE LONGUEUR INFINIE**

Nous allons montrer que le potentiel

$$\phi = Ur \cos \theta - P \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

( $U, P, \Gamma$  sont des constantes) décrit bien l'écoulement stationnaire 2-D d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre circulaire de longueur infinie.

- En coordonnées polaires, le gradient et le laplacien d'un champ  $\alpha$  s'écrivent :

$$\nabla \alpha = \partial_r \alpha \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \alpha \mathbf{e}_\theta + \partial_z \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\Delta \alpha = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \alpha) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \alpha + \partial_z^2 \alpha$$

- On vérifie tout d'abord aisément que les 3 termes constitutifs du potentiel satisfont chacun à l'équation de Laplace.
- Les composantes du champ des vitesses s'écrivent :

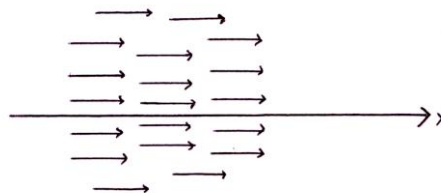
$$v_r = \left( U + \frac{P}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$v_\theta = - \left( U - \frac{P}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{1}{2\pi r} \Gamma$$

- Interprétation des champs de vitesse correspondant à  $U, P, \Gamma$  respectivement

$$1. U \rightarrow \begin{cases} v_r = U \cos \theta \\ v_\theta = -U \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = U \\ v_y = 0 \end{cases}$$

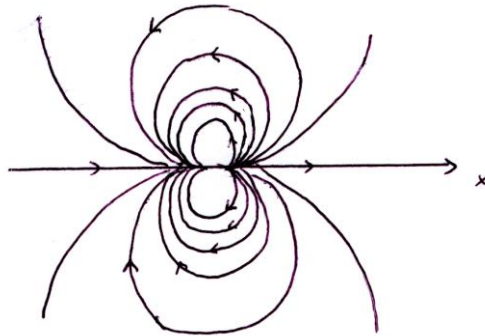
Champ de vitesse uniforme :  $\mathbf{v} = U \mathbf{e}_x$



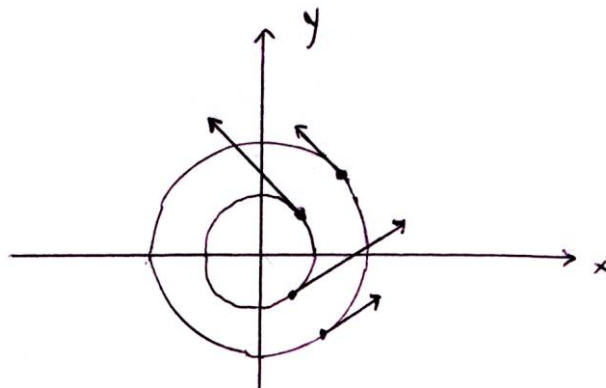
<sup>8</sup> On peut montrer que la circulation est indépendante de la courbe irréductible choisie autour d'un obstacle.

$$2. P \rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{P}{r^2} \cos \theta \\ v_\theta = \frac{P}{r^2} \sin \theta \end{cases}$$

cf. électrostatique :  $\mathbf{v} \equiv$  champ électrique d'un dipôle plan



$$3. \Gamma \rightarrow \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$



- Conditions aux limites pour le champ total ( $U+P+\Gamma$ )

1. Conditions aux limites à l'infini : vitesse uniforme à l'infini =  $U\mathbf{e}_x$

$$\begin{cases} v_r \rightarrow U \cos \theta \\ v_\theta \rightarrow -U \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \text{OK!}$$

2. Conditions le long du cylindre : annulation de la vitesse radiale en  $r = R$  :

$$v_r(R) = \left( U + \frac{P}{R^2} \right) \cos \theta = 0 \quad \text{si } P = -UR^2$$

- Expressions finales des champs (toutes les équations sont satisfaites, quelle que soit la valeur prise par le paramètre  $\Gamma$ ) :

$$\phi = Ur \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

$$v_r = U \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

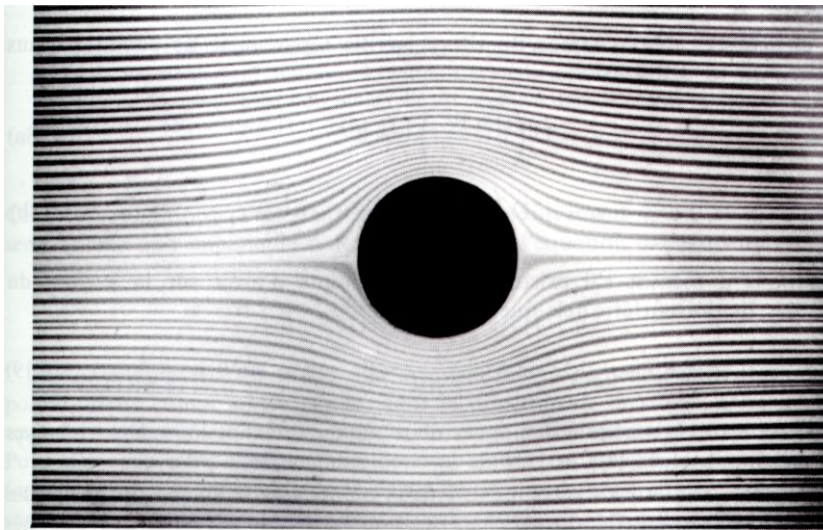
$$v_\theta = -U \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

- Calculons la circulation de  $\mathbf{v}$  sur un cercle centré sur l'origine et extérieur à  $r = R$

$$\int_{C(r=r_0>R)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} v_\theta r_0 d\theta = \int \frac{\Gamma}{2\pi r_0} r_0 d\theta = \Gamma$$

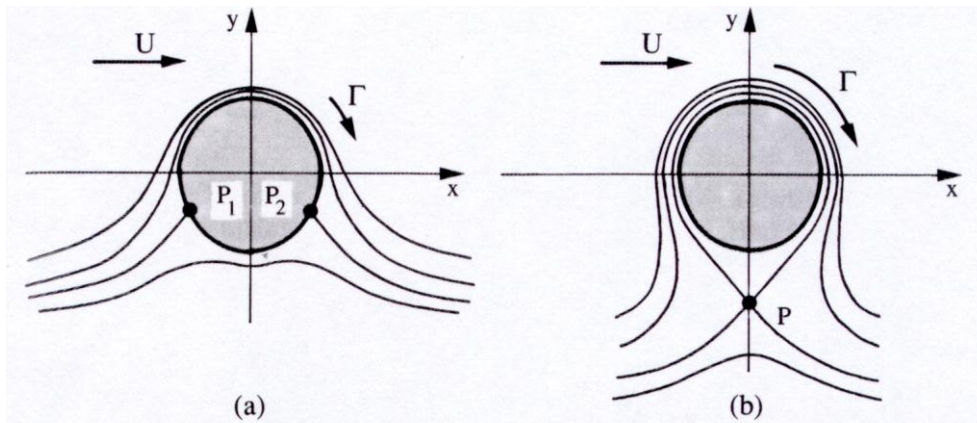
La solution n'est donc unique que si  $\Gamma$  est donné (le domaine occupé par le fluide n'est pas simplement connexe)<sup>9</sup>.

- Représentations de l'écoulement



Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini, dans le cas où la circulation de la vitesse autour du cylindre est nulle. La figure ci-dessus a été obtenue expérimentalement dans une cellule de Hele-Shaw, qui permet de simuler un écoulement plan et potentiel à partir de celui autour d'un obstacle placé entre deux plaques parallèles et très proches. Cette technique est discutée au chapitre 8 (§ 7.5 et fig. 8.22) (cliché H. Peregrine, *An Album of Fluid Motion*).

<sup>9</sup> La circulation autour de toute courbe qui n'entoure pas le cylindre est nulle car l'écoulement est irrotationnel. En revanche, la circulation autour des courbes entourant le cylindre est non nulle, même si l'écoulement est partout irrotationnel !



Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini. Cas où la circulation  $\Gamma$  de la vitesse autour du cylindre est non nulle (elle est négative dans le cas de la figure) ; (a) :  $0 < |\Gamma| < 4\pi R |U|$  ; (b)  $|\Gamma| > 4\pi R |U|$ .

- Force exercée par l'écoulement sur l'obstacle.

Si on note  $\mathbf{F}$  la force par unité de longueur du cylindre et  $l$  la longueur d'une partie du cylindre, on a

$$\mathbf{F} \cdot l = \int_{\text{surf.cyl.}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int \mathbf{n} \cdot (-p \mathbf{1}) dS = \int (-p) \mathbf{n} dS = -lR \int_0^{2\pi} p(R, \theta) \mathbf{n} d\theta$$

et donc

$$\mathbf{F} = -R \int_0^{2\pi} p(R, \theta) (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) d\theta$$

On peut calculer la pression au moyen de l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$$

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (v_\infty^2 - v^2)$$

avec  $v_\infty = U$  et

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = U^2 \left( 1 + \frac{R^4}{r^4} \right) - 2U^2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^2} - \frac{\Gamma U}{\pi r} \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

$$v^2(r=R) = 2U^2(1 - \cos 2\theta) + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} - \frac{2\Gamma U}{\pi R} \sin \theta$$

Donc,

$$p(R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho \left( -U^2 + 2U^2 \cos 2\theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{2\Gamma U \sin \theta}{\pi R} \right)$$

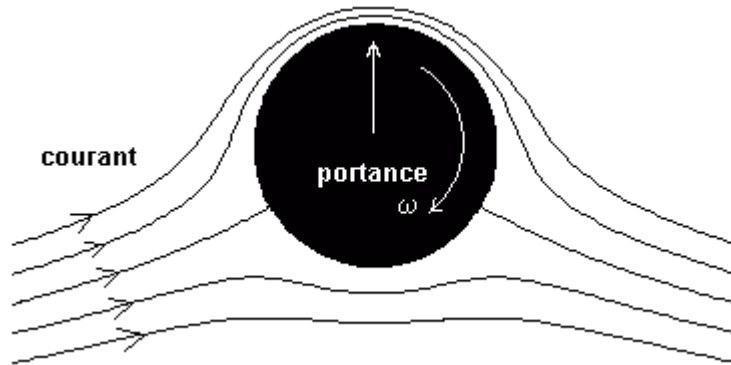
La force par unité de longueur s'écrit donc

$$\mathbf{F} = -R \int_0^{2\pi} \left( p_\infty + \frac{1}{2} \rho \left( -U^2 + 2U^2 \cos 2\theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{2U\Gamma \sin \theta}{\pi R} \right) \right) (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) d\theta$$

Dans cette intégrale, seul le terme proportionnel à  $\Gamma U \sin^2 \theta \mathbf{e}_y$  donne une contribution non nulle<sup>10</sup>. On trouve en finale :

$$\mathbf{F} = -\rho U \Gamma \mathbf{e}_y.$$

- Interprétation de l'expression de la force ( $\Gamma < 0$  dans l'exemple de la Figure ci-dessous).



1. Traînée : force parallèle à l'écoulement

$$F_x = 0$$

L'absence de traînée constitue le « Paradoxe de d'Alembert ». Ceci est dû au caractère non visqueux du fluide idéal.

2. Portance : force perpendiculaire à l'écoulement

$$F_y = -\rho U \Gamma$$

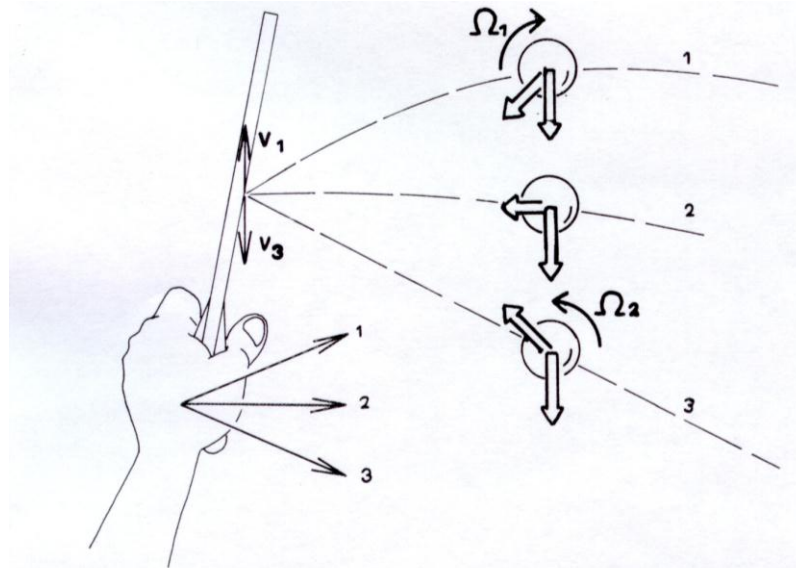
C'est donc la circulation qui engendre la portance : c'est ce qu'on appelle l'effet Magnus (force de Magnus) (Le signe de la force peut se retrouver rapidement en appliquant Bernoulli :  $P_{\text{sup}} < P_{\text{inf}}$  dans la figure ci-dessus. On remarquera aussi que si le sens de l'écoulement change (changement du signe de  $U$ ), la force reste inchangée car le signe de la circulation change simultanément).

3. Commentaires

- ✓ On peut montrer que les expressions des forces de traînée et de portance données ci-dessus sont indépendantes de la forme (circulaire ou autre) du cylindre plongé dans l'écoulement.

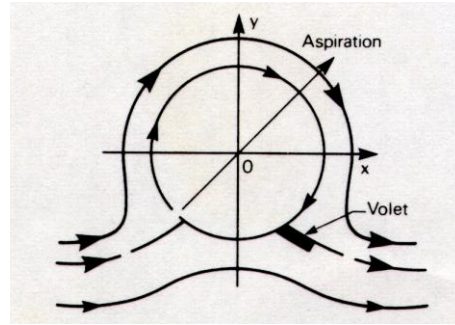
<sup>10</sup> On a  $\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$  ;  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$ .

- ✓ Dans un fluide idéal, il n'est pas possible d'expliquer l'apparition d'une circulation autour d'un obstacle lors de la mise en mouvement du fluide, car cette circulation est fondamentalement indéterminée
- ✓ En revanche, l'apparition de la circulation peut être expliquée si le fluide est visqueux.
- ✓ Exemple 1 : en faisant tourner le cylindre autour de son axe, on peut engendrer la circulation (application : Lift ou coupé au tennis ou au tennis de table : on fait tourner la balle pour créer de la circulation)

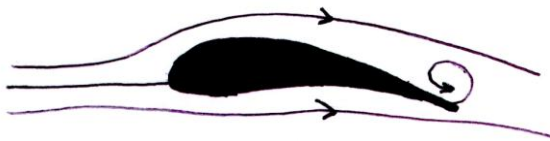


L'aérodynamique de la frappe de la balle au ping-pong. Lors de la frappe, le joueur a sensiblement *trois* options pour influencer la courbure de la trajectoire future de la balle. (a) *Le lift*. En déplaçant sa main vers le haut au moment de l'impact il crée un déplacement à la vitesse  $V_1$  dans la direction tangente à l'impact. Le non-glissement de la balle sur la raquette crée une rotation  $\Omega \sim \frac{V_1}{d}$  et, par suite, une portance proportionnelle à  $\Omega_1$  sur la balle. La trajectoire sera incurvée vers le bas, permettant une vitesse initiale plus forte tout en ne dépassant pas la limite permise pour le premier rebond. (b) *Le coup plat*. C'est le mouvement naturel du débutant qui « pousse » la balle. Le joueur n'a aucune influence sur la courbure de la trajectoire. (c) *Le coupé*. C'est le pendant du lift; on a une vitesse tangentielle  $V_3$  qui crée une portance vers le haut. La trajectoire sera plate.

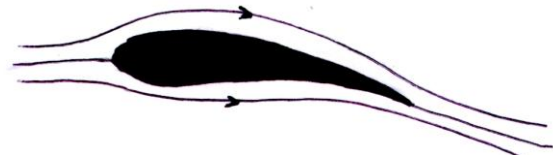
- ✓ Exemple 2 : en combinant les effets d'un volet déflecteur et d'un système d'aspiration, le commandant Cousteau met au point la « turbovoile » qui a équipé le bateau « Moulin à vent ».



- ✓ Exemple 3 : les ailes d'avions. C'est la forme particulière des ailes d'avions (bord d'attaque arrondi, bord de fuite tranchant) ainsi que l'existence d'un angle d'attaque  $\alpha$  (inclinaison par rapport à l'horizontale) non nul qui permet, grâce à la viscosité, d'engendrer autour de l'aile la circulation responsable de la portance. De manière un peu plus précise, on peut signaler que pendant les phases d'accélération de l'avion, des tourbillons sont émis au bord de fuite<sup>11</sup> qui permettent aux lignes de courant qui passent par-dessus l'aile et à celles qui passent par-dessous de venir se rejoindre en le bord de fuite (condition de Kutta), ce qui donne naissance à la circulation autour de l'aile.

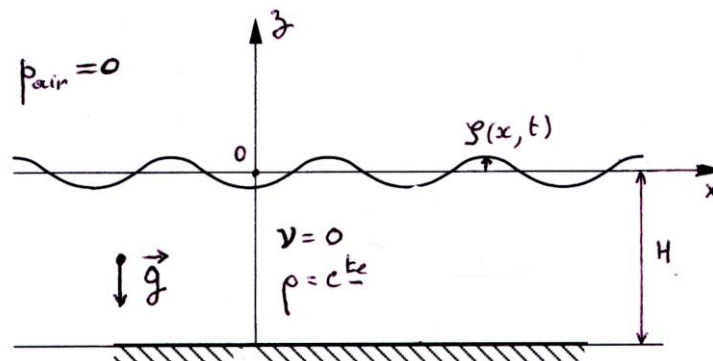


Pendant l'accélération



Après l'accélération

## ONDES GRAVIFIQUES ET CAPILLAIRES A LA SURFACE D'UN FLUIDE PARFAIT



<sup>11</sup> Ce genre de « tourbillons de démarrage » peut facilement s'observer en déplaçant une cuillère dans une tasse de café ou encore en déplaçant sa main à la surface de l'eau de son bain.

Considérons une couche horizontale d'un fluide idéal incompressible initialement au repos et dont la surface supérieure est libre (Figure ci-dessus). On vérifie facilement (équation d'Euler) que

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = 0 \\ p_0 = -\rho g z \end{cases}$$

constitue la solution décrivant l'équilibre de la couche de fluide dont la surface supérieure est parfaitement horizontale. Nous allons à présent étudier les perturbations infinitésimales par rapport à cet état d'équilibre.

Dans l'état perturbé, on écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v} \\ p = p_0 + \delta p \end{cases}$$

avec  $\delta\mathbf{v}, \delta p$  infiniment petits.

Les équations générales du problème s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(gz) - \nabla \frac{p}{\rho} \end{cases}$$

On en déduit tout d'abord

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0$$

On a ensuite

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) + (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) \cdot \nabla(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) = -\nabla g z - \frac{\nabla(-\rho g z + \delta p)}{\rho}$$

d'où, au premier ordre

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{v}) = -\nabla g z + \nabla g z - \nabla \frac{\delta p}{\rho}$$

Finalement, les équations linéarisées pour les perturbations s'écrivent

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{v} = -\nabla \frac{\delta p}{\rho} \tag{2}$$

En prenant la divergence de l'équation (2) et en tenant compte de (1), on déduit que les perturbations de pression satisfont à l'équation de Laplace :

$$\Delta \delta p = 0 \tag{3}$$

Les conditions aux limites au bas de la couche exprime que  $v_z(z = -H) = 0$ . En termes des perturbations, on a donc

$$\delta v_z(z = -H) = 0 \tag{4}$$

En haut de la couche, il convient d'exprimer les conditions définissant une surface libre. Soit tout d'abord  $\Sigma(x, y, z, t) \equiv z - \zeta(x, y, t) = 0$  l'équation de la surface déformée. Vu l'équation (6.2.12), on a alors, à l'interface :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_x \partial_x \zeta + v_y \partial_y \zeta$$

ou encore

$$v_z = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_x \partial_x \zeta + v_y \partial_y \zeta \quad \text{en } z = \zeta(x, y, t) \quad (7)$$

On peut ensuite linéariser cette équation en écrivant

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0(x, y, t) + \delta\zeta(x, y, t) = \delta\zeta(x, y, t) \quad (8)$$

puisque, pour la solution d'équilibre, la surface est plane et  $\zeta_0(x, y, t) = 0$ . Sur l'interface, le premier membre de (7) peut s'écrire, au premier ordre :

$$\begin{aligned} v_z(x, y, \delta\zeta(x, y, t), t) &= v_{0,z} + \delta v_z(x, y, \delta\zeta(x, y, t), t) \\ &= \delta v_z(x, y, \delta\zeta(x, y, t), t) \\ &= \delta v_z(x, y, 0, t) + O(2) \\ &\approx \delta v_z(x, y, 0, t) \end{aligned}$$

Le second membre devient quant à lui :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_x \partial_x \zeta + v_y \partial_y \zeta &= \frac{\partial\delta\zeta}{\partial t} + \delta v_x \partial_x \delta\zeta + \delta v_y \partial_y \delta\zeta \\ &= \frac{\partial\delta\zeta}{\partial t} + O(2) \\ &\approx \frac{\partial\delta\zeta}{\partial t} \end{aligned}$$

Finalement, l'équation de la surface déformée s'écrit, au premier ordre en les perturbations :

$$\delta v_z(x, y, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \delta\zeta(x, y, t) \quad (9)$$

Ensuite, il faut exprimer les conditions aux limites au travers de la surface dont on vient d'obtenir l'équation. Si on désigne respectivement par les indices 1 et 2 le fluide et l'air qui le surplombe et que la normale  $\mathbf{n}$  pointe du fluide vers l'air, les conditions aux limites (6.3.6) s'écrivent :

$$\mathbf{n} \left[ -p_2 + p_1 + \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] = 0 \quad \text{en } z = \delta\zeta(x, y, t) \quad (10)$$

ou encore, avec les conventions de signes définies antérieurement pour les courbures et avec  $p_2 = p_{air} = 0$  et  $p_1 = p_{fluide} = -\rho g z + \delta p$  :

$$0 = -\rho g z + \delta p + \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{en } z = \delta\zeta(x, y, t) \quad (11)$$

Afin de linéariser cette équation, on réécrit tout d'abord le deuxième terme du membre de droite sous la forme

$$\delta p(x, y, \delta \zeta(x, y, t), t) = \delta p(x, y, 0, t) + O(2) \approx \delta p(x, y, 0, t) \quad (12)$$

L'équation (11) devient alors, à l'ordre 1 en les perturbations :

$$0 = -\rho g \delta \zeta(x, y, t) + \delta p(x, y, 0, t) + \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)_{lin}$$

où l'indice « lin » signifie que la quantité doit encore être linéarisée. On a donc enfin<sup>12</sup> :

$$\delta p(x, y, 0, t) = \rho g \delta \zeta(x, y, t) - \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)_{lin} \quad (13)$$

En résumé, les équations et conditions aux limites régissant l'évolution des perturbations sont données par les relations (1), (2), (3), (4), (9), (13)

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{v} = -\nabla \frac{\delta p}{\rho} \quad (15)$$

$$\Delta \delta p = 0 \quad (16)$$

$$\delta v_z(z = -H) = 0 \quad (17)$$

$$\delta v_z(x, y, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \delta \zeta(x, y, t) \quad (18)$$

$$\delta p(x, y, 0, t) = \rho g \delta \zeta(x, y, t) - \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)_{lin} \quad (19)$$

Cherchons à présent une solution de ces équations qui représente une onde plane se propageant parallèlement à OX. On écrit donc

$$\delta p(x, y, z, t) = \pi(z) \sin(kx - \omega t) \quad (20)$$

L'équation de Laplace (16) donne alors

$$\frac{d^2 \pi}{dz^2} = k^2 \pi \quad (21)$$

et on a donc,

$$\pi(z) = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad (21)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes. L'équation de mouvement (15) donne ensuite

<sup>12</sup> Au premier ordre, la condition est une relation que l'on écrit sur la surface **non déformée** (en  $z = 0$ ).

$$\rho \partial_t \delta \mathbf{v} = -\nabla \delta p = \begin{pmatrix} -k\pi \cos(kx - \omega t) \\ 0 \\ -\frac{d\pi}{dz} \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix} \quad (22)$$

En intégrant par rapport au temps, on trouve

$$\begin{aligned} \delta v_x &= \frac{k}{\omega} \frac{\pi(z)}{\rho} \sin(kx - \omega t) \\ \delta v_y &= 0 \\ \delta v_z &= -\frac{1}{\omega \rho} \pi'(z) \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (23)$$

Les conditions aux limites en bas donnent :

$$\pi'(z = -H) = k(Ae^{-hH} - Be^{hH}) = 0 \quad (24)$$

Pour exprimer les conditions aux limites en haut de la couche, il faut tout d'abord linéariser l'expression de la courbure moyenne qui apparaît dans (19). Etant donné qu'on s'intéresse à des ondes planes se propageant le long de l'axe  $x$ , on a tout d'abord

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$$

L'expression de la courbure en termes de la déformation de la surface est donnée par

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\pm \zeta''(x, t)}{(1 + \zeta'(x, t)^2)^{3/2}}$$

où les dérivées par rapport à  $x$  sont notées par des primes.

En limitant cette expression au premier ordre et en tenant compte de la convention de signe qui impose que la courbure soit positive lorsque la concavité de la surface déformée est dirigée vers l'air, on a

$$\frac{1}{R_1} \approx \delta \zeta''(x, t) \quad (25)$$

La condition aux limites (19) devient donc

$$\delta p(x, 0, t) = \rho g \delta \zeta'(x, t) - \gamma \delta \zeta''(x, t) \quad (26)$$

En dérivant cette relation par rapport au temps et en éliminant la déformation de surface au moyen de l'équation de la surface (18), il vient

$$\partial_t \delta p(x, 0, t) = \rho g \delta v_z(x, 0, t) - \gamma \delta v_z''(x, 0, t) \quad (27)$$

En injectant les expressions (23) pour les perturbations de vitesse, on arrive à

$$\pi(0) = \frac{g}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 \gamma}{\rho g} \right) \pi'(0) \quad (28)$$

ou encore,

$$\pi(0) - \frac{g_{eff}}{\omega^2} \pi'(0) = 0 \quad (29)$$

où  $g_{eff} = g \left( 1 + \frac{k^2 \gamma}{\rho g} \right)$  est une accélération de la gravité « effective » combinant les effets de la pesanteur et de la tension de surface<sup>13</sup>. En tenant compte de l'expression (21) de la perturbation de pression, on obtient enfin

$$A \left( 1 - \frac{g_{eff} k}{\omega^2} \right) + B \left( 1 + \frac{g_{eff} k}{\omega^2} \right) = 0 \quad (30)$$

Les deux conditions aux limites (24) et (30) s'écrivent donc

$$\begin{cases} A(e^{-kH}) + B(-e^{kH}) = 0 \\ A \left( 1 - \frac{g_{eff} k}{\omega^2} \right) + B \left( 1 + \frac{g_{eff} k}{\omega^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Ce système admet une solution non triviale pour  $A$  et  $B$  si et seulement si le déterminant du système s'annule, c-à-d si et seulement si

$$\omega^2 = \frac{g_{eff}}{H} kH \operatorname{th}(kH) \quad (32)$$

Cette relation est l'équation de dispersion. En introduisant la vitesse de phase de l'onde  $c = \omega/k$ , on peut récrire (32) sous la forme

$$c^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th}(kH) \left( 1 + \frac{k^2 \gamma}{\rho g} \right) = \frac{g}{k} \operatorname{th}(kH) (1 + k^2 l_c^2) \quad (33)$$

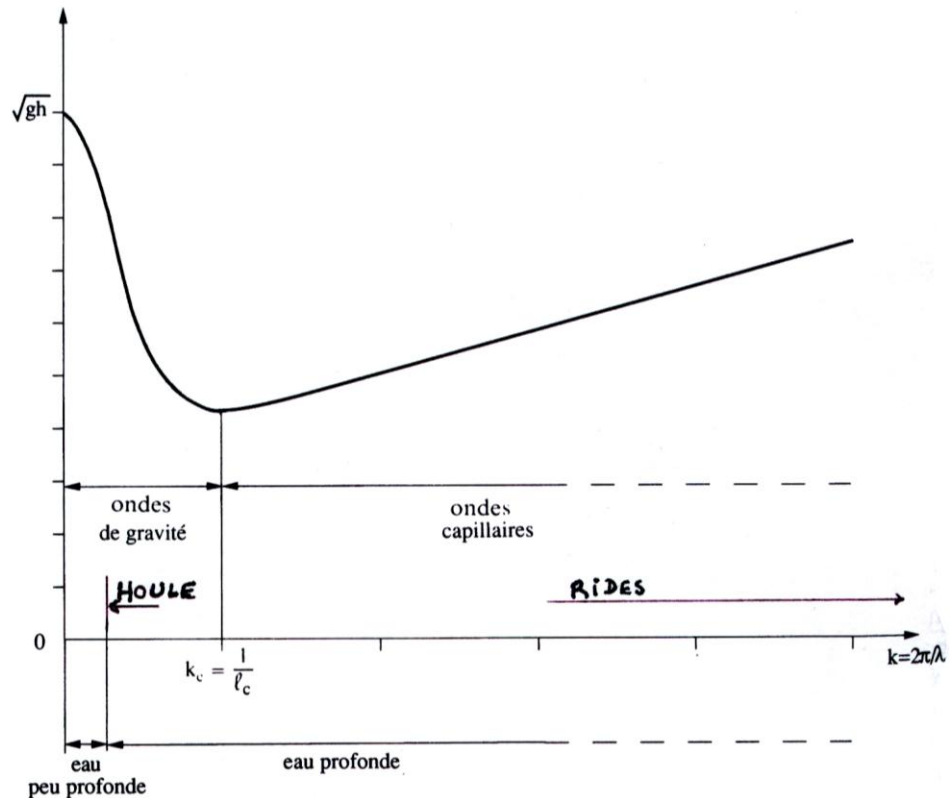
où la longueur capillaire  $l_c$  est définie par<sup>14</sup>

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (34)$$

Nous allons à présent discuter l'équation de dispersion en faisant l'hypothèse, souvent vérifiée dans la pratique, que  $H \gg l_c$ . Nous envisagerons successivement quelques cas limites permettant de construire et d'interpréter la figure ci-dessous, dans laquelle sont représentées les variations de la vitesse de phase avec le nombre d'ondes.

<sup>13</sup> Les effets de la pesanteur s'ajoutent simplement aux effets dus à la capillarité.

<sup>14</sup> Pour l'eau, la tension de surface vaut  $70 \times 10^{-3}$  N/m et la longueur capillaire vaut 2.6 mm.



**1. Ondes « courtes »** (ou eaux « profondes » : haute mer)

Si  $\lambda \ll 2\pi H$  (ou  $kH \gg 1$ ), on a  $\text{th}(kH) \approx 1$  et on peut écrire

$$c \approx \sqrt{\frac{g}{k} (1 + k^2 l_c^2)}$$

Les ondes courtes sont donc dispersives et leur vitesse  $c$  présente un minimum par rapport à  $k$  en  $l_c^{-1}$ . Deux sous catégories peuvent être envisagées :

**1.a.** Si  $\lambda \gg 2\pi l_c$  (ou  $k^2 l_c^2 \ll 1$  ou  $k \ll l_c^{-1}$ ), on peut écrire

$$c^2 = \frac{g}{k}$$

Cette relation de dispersion caractérise ce que l'on appelle la houle du large. Il s'agit d'ondes purement gravifiques. Leur vitesse de groupe est donnée par :

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} = \frac{1}{2}c$$

À titre d'information, signalons que des valeurs typiques des grandeurs associées à la houle du large sont

$$\begin{cases} \lambda \sim 100m \\ c = \sqrt{g/k} \sim 12,5m/s \\ T = 2\pi/(ck) \sim 8\text{sec} \rightarrow \text{cf. } \Delta t \text{ entre 2 vagues à la plage !} \end{cases}$$

**1.b.** Si  $\lambda \ll 2\pi l_c$  (ou  $k^2 l_c^2 \gg 1$  ou  $k \gg l_c^{-1}$ ), on a

$$c^2 = gkl_c^2 = \frac{k\gamma}{\rho}$$

Les ondes correspondantes sont des ondes capillaires<sup>15</sup> appelées « rides »

**2. Ondes « longues »** (ou eaux « peu profondes »)

Si  $\lambda \gg 2\pi H \gg 2\pi l_c$  (ou  $kH \ll 1$ ), on a  $\text{th}(kH)/(kH) \approx 1$  et la relation de dispersion prend la forme simplifiée suivante :

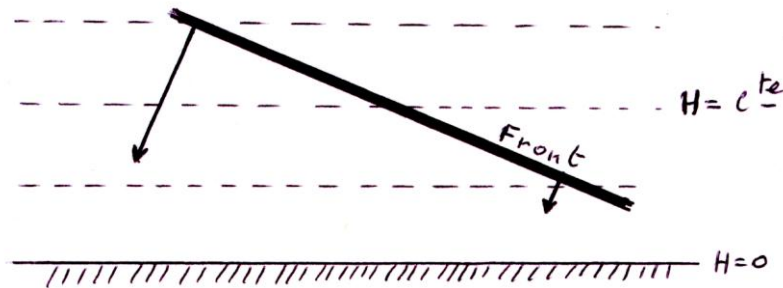
$$\begin{aligned} c^2 &\sim \frac{g}{k} \text{th } kH (1 + k^2 l_c^2) \\ &\sim gH \frac{\text{th } kH}{kH} \end{aligned}$$

ou encore

$$c \approx \sqrt{gH}$$

On voit donc que la vitesse de phase des ondes longues est indépendante du nombre d'ondes et le milieu est donc non dispersif. Cette expression de la vitesse permet d'expliquer de manière simple quelques phénomènes communément observés.

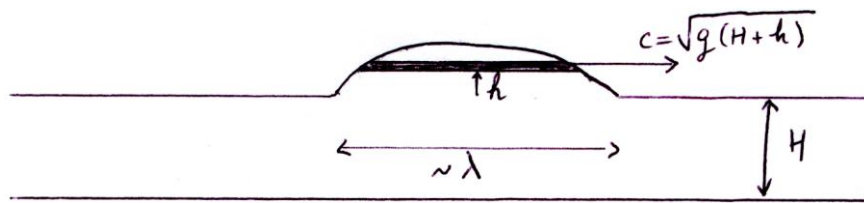
- Puisque la vitesse diminue avec la profondeur, on peut comprendre que les fronts de vagues qui s'approchent du littoral tendent à se réfracter et à devenir parallèle à la côte.



- On peut aussi comprendre que la longueur d'onde des vagues tend à diminuer lorsque celles-ci s'approchent du littoral. La période est en effet fixée par la fréquence des ondes en provenance du large. On a alors  $\sqrt{gH} = c = \omega/k = (2\pi/T)/(2\pi/\lambda) = \lambda/T$  et la longueur d'onde diminue avec  $H$ .
- Enfin, on peut donner une explication qualitative sommaire de la genèse du phénomène de déferlement des vagues. Il convient cependant d'être prudent car la théorie établie ci-dessus est valable pour des ondes infinitésimales, alors que le déferlement ne se produit que pour des ondes de hauteur finie. On peut procéder de la manière suivante. Considérons (voir schéma) une déformation de hauteur finie se propageant à la surface d'une couche d'épaisseur  $H$  et supposons que la dimension horizontale de la perturbation,

<sup>15</sup> Dans l'eau, les rides sont caractérisées par des longueurs d'ondes de quelques centimètres au maximum.

qui donne l'ordre de grandeur de la longueur d'onde caractéristique  $\lambda$  du problème, est grande par rapport à  $H$ . On peut alors par la pensée découper la « bosse » en une superposition verticale de perturbations de hauteur infinitésimale. Chacune de ces perturbations est située à une hauteur  $H + h$  (voir schéma) et se déplace donc avec une vitesse  $c(h) = \sqrt{g(H + h)}$ . Ainsi donc, les couches du haut se meuvent plus rapidement que celles du bas et l'on conçoit que le déferlement peut effectivement débuter lorsque les parties supérieures de la vague finissent par « tomber » devant les parties situées plus bas qu'elles. Cette explication ne rend bien sûr compte que de l'origine du déferlement ; l'étude détaillée d'une vague déferlante requiert le recours à une description complètement non linéaire que l'on ne peut aborder ici.



Pour terminer cette étude des ondes capillaires et gravifiques, soulignons encore que nous n'avons pas tenu compte dans notre analyse des phénomènes de viscosité, qui, dans la réalité, engendrent de la dissipation et donnent lieu à l'amortissement, ou l'atténuation, des vagues. Notons aussi que notre démarche s'est limitée à l'analyse de la *propagation* des vagues, en laissant de côté le problème très difficile de la *génération* des vagues par le vent.

## 6.8 Application : solutions exactes des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont des équations non linéaires qui sont presque toujours impossibles à résoudre analytiquement. Dans certains cas cependant, des symétries géométriques, associées à des hypothèses simplificatrices sur les propriétés thermophysiques du fluide étudié, font disparaître les termes non-linéaires et une résolution analytique peut être réalisée. Nous allons examiner quelques exemples de ce genre de situations.

Nous limiterons tout d'abord notre étude aux fluides *incompressibles* dont la *viscosité est constante* (indépendante de la température, p. ex.). Dans ce cadre, les équations qui gouvernent l'évolution du système sont données par (6.6.13) dans laquelle  $\mu = \text{constante}$ , combinée avec la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  :

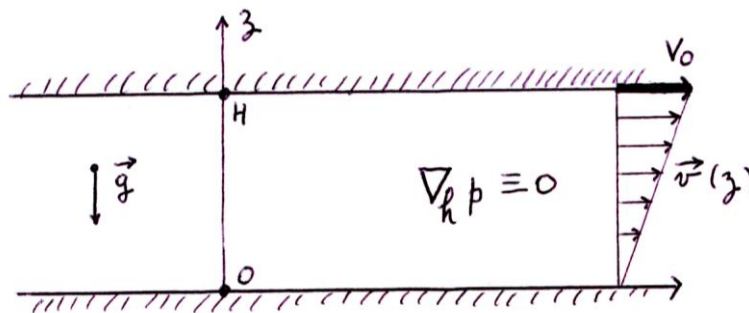
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

On notera que, dans le cadre des hypothèses qui ont été faites, ces équations sont tout à fait découplées des équations « thermiques ». Celles-ci en revanche dépendent du champ des vitesses et pourraient, au besoin, être résolues en y introduisant la solution du système (1)-(2) préalablement obtenue.

### 1. ECOULEMENT DE COUETTE PLAN

Ecoulement stationnaire unidirectionnel entre deux plans parallèles dont l'un est fixe et l'autre se déplace à vitesse constante (voir schéma). Pas de gradient horizontal de pression ( $\partial_x p = \partial_y p = 0$ ).



- $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow u = u(y, z) + \text{symétrie} \Rightarrow u = u(z)$
- Dans Navier-Stokes, on a  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$  et  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = u \partial_x u \mathbf{e}_x \equiv 0$  (pas de terme non linéaire vu la symétrie géométrique). Il vient donc, en projetant suivant les directions  $x$  et  $z$  :

$$-\partial_x p + \mu \partial_z^2 u = \mu \partial_z^2 u = 0 \quad (3)$$

$$-\rho g - \partial_z p = 0 \quad (4)$$

- (3) donne  $\partial_z^2 u = 0 \rightarrow u = az + b$
- Conditions aux limites :  $u(0) = 0, u(H) = V_0$ , d'où

$$u = \frac{V_0}{H} z$$

- L'équation (4) donne le champ de pression :

$$p = p_{Haut} - \rho g(z - H)$$

La pression est donc « hydrostatique » même si le fluide est en mouvement.

- NB. Vorticité :  $\nabla \wedge \mathbf{v} = \partial_z u \mathbf{e}_y = \frac{V_0}{H} \mathbf{e}_y$  (imaginer un moulinet dans l'écoulement). Ce sont les deux parois solides qui engendrent la vorticité.
- Force exercée par les plaques sur le fluide ( $\mathbf{n}_{fl \rightarrow pl}$  est dirigé du fluide vers les plaques)

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_{fl \rightarrow pl} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p_{Haut} + \rho g(z - H)) \mathbf{1} + \frac{\mu N_0}{H} \begin{pmatrix} . & . & 1 \\ . & . & . \\ 1 & . & . \end{pmatrix}$$

En bas,  $\mathbf{n}_{fl \rightarrow pl} = -\mathbf{e}_z$  et

$$\mathbf{t}_{surle\ fluide}^{Bas} = p_{Bas} \mathbf{e}_z - \frac{\mu N_0}{H} \mathbf{e}_x$$

En haut,  $\mathbf{n}_{fl \rightarrow pl} = \mathbf{e}_z$  et

$$\mathbf{t}_{surle\ fluide}^{Haut} = -p_{Haut} \mathbf{e}_z + \frac{\mu N_0}{H} \mathbf{e}_x$$

- Puissance développée par le monde extérieur (par unité de surface horizontale de la plaque)

En bas,

$$P_{Bas} = \mathbf{t}_{surle\ fluide}^{Bas} \cdot \mathbf{v}_{plaque\ du\ bas} = \left( p_{bas} \mathbf{e}_z - \frac{\mu N_0}{H} \mathbf{e}_x \right) \cdot \mathbf{v}_{plaque\ du\ bas} = 0$$

En haut,

$$\begin{aligned}
P_{\text{Haut}} &= \mathbf{t}_{\text{sur le fluide}}^{\text{Haut}} \cdot \mathbf{v}_{\text{plaqued u haut}} \\
&= \left( -p_{\text{haut}} \mathbf{e}_z + \frac{\mu V_0}{H} \mathbf{e}_x \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{plaqued u haut}} \\
&= \left( -p_{\text{haut}} \mathbf{e}_z + \frac{\mu V_0}{H} \mathbf{e}_x \right) \cdot V_0 \mathbf{e}_x \\
&= \frac{\mu V_0^2}{H}
\end{aligned}$$

Au total,  $P_{\text{Extérieur}} = \frac{\mu V_0^2}{H}$ .

- Puissance mécanique dissipée par viscosité (chauffage !) (par unité de surface)

$$P_{\text{diss}} = \int_0^H \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{V}} dz = \int_0^H 2\mu \underline{\underline{V}} : \underline{\underline{V}} dz$$

(la pression disparaît vu l'incompressibilité !)

On a alors

$$\underline{\underline{V}} : \underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \frac{1}{2} \partial_z u \\ \frac{1}{2} \partial_z u & \cdot & \cdot \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \frac{1}{2} \partial_z u \\ \frac{1}{2} \partial_z u & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\partial_z u)^2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{H^2}$$

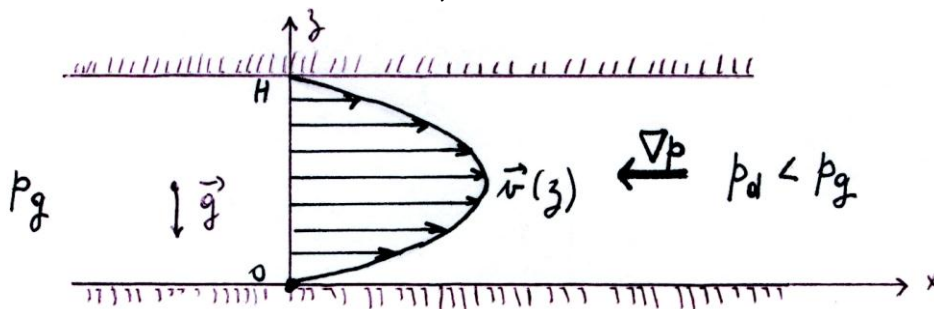
et donc

$$P_{\text{diss}} = \frac{\mu V_0^2}{H} = P_{\text{extérieur}}$$

## 2. ECOULEMENT DE POISEUILLE PLAN

Ecoulement stationnaire unidirectionnel entre deux plans parallèles fixes engendré par un gradient de pression parallèle aux plaques ( $\partial_x p = \text{constante}$ ,  $\partial_y p = 0$ ). On trouve le champ de vitesse parabolique suivant<sup>1</sup> :

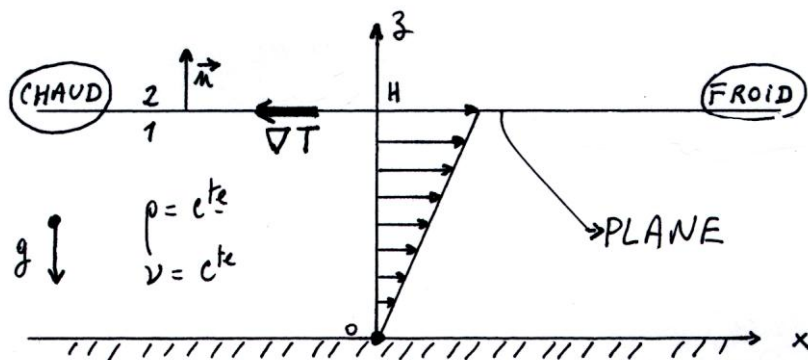
$$\mathbf{v} = \frac{\partial_x p}{2\mu} z(z-H) \mathbf{e}_x$$



<sup>1</sup> Dans le cas du schéma, on a  $\partial_x p < 0$ .

### 3. EFFET MARANGONI

- La tension de surface qui existe à la surface libre d'un fluide peut dépendre de divers paramètres physico-chimiques, tels que la concentration en les divers constituants du fluide ou, plus simplement, la température régnant à la surface. La variation de la tension de surface avec ces paramètres constitue l'essence de l'effet Marangoni.
- On conçoit facilement que si des différences de tensions de surface existent à la surface libre d'une couche de fluide, elles sont susceptibles d'influer sur le mouvement du liquide. Nous allons mettre en évidence ce phénomène et l'étudier en détail dans le cas particulier d'une couche de fluide horizontale et infinie dont la surface libre, supposée plane, est soumise à un gradient de température constant qui donne naissance à un gradient de tension de surface.

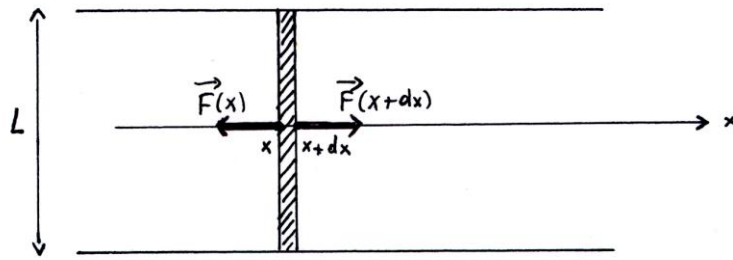


- Considérons donc la dépendance de la tension de surface  $\gamma$  par rapport à la température. Pour les fluides usuels,  $\gamma$  décroît lorsque la température augmente. En faisant l'hypothèse que les différences de température qui interviennent dans notre système ne sont pas trop importantes, nous supposons, en première approximation, que la tension de surface peut s'écrire comme une fonction linéaire de la température :

$$\gamma(T) = \gamma_0(1 - b(T - T_0)) \quad (1)$$

où  $T_0$  est une température de référence (l'ordre de grandeur de la température régnant dans le système étudié),  $\gamma_0 = \gamma(T_0)$  et  $b = -\gamma_0^{-1} d\gamma(T)/dT|_{T=T_0}$  est une constante ( $b$  est positif pour les fluides usuels).

- Afin de tenir compte du fait que la tension de surface n'est pas uniforme le long de la surface libre, il faut ajouter un terme à la condition aux limites (6.2.10) traduisant l'équilibre des forces de part et d'autre de l'interface. Ce terme représente la force par unité de surface (la contrainte) due aux variations spatiales de  $\gamma$ . Si on suppose que la tension de surface ne varie que suivant la direction  $x$ , on peut obtenir l'expression du terme en question à partir du schéma suivant, représentant une portion de largeur  $L$  de la surface libre vue d'en haut.



Les forces horizontales qui s'exercent de part et d'autre de la bande infinitésimale hachurée s'écrivent :

$$\mathbf{F}(x) = -\gamma(x)L\mathbf{e}_x \text{ et } \mathbf{F}(x+dx) = \gamma(x+dx)L\mathbf{e}_x$$

La force par unité de surface subie par la bande hachurée, c-à-d la tension de Marangoni  $\mathbf{t}_M$  s'écrit donc, en tenant compte de (1)

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_M &= \frac{\mathbf{F}(x+dx) + \mathbf{F}(x)}{L dx} \\ &= \frac{\gamma(x+dx) - \gamma(x)}{dx} \mathbf{e}_x \\ &= \frac{d\gamma}{dx} \mathbf{e}_x \\ &= -\gamma_0 b \frac{dT}{dx} \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (2)$$

- En supposant que la surface libre reste plane et que l'écoulement est stationnaire, on peut à présent déterminer le champ des vitesses du fluide, sous les hypothèses supplémentaires :

$$\partial_x p = 0, \partial_y p = 0, \partial_x T = \text{constante}, \partial_y T = 0$$

La résolution est très semblable à celle réalisée pour l'écoulement de Couette. La composante  $u$  du champ des vitesses parallèle à l'axe  $x$  est linéaire en  $z$  :

$$u = az + b \quad (3)$$

et la condition aux limites en bas donne  $b = 0$ . La projection de l'équation de Navier-Stokes le long de la verticale donne le champ de pression sous la forme :

$$p = -\rho g z + p_0 \quad (4)$$

Les deux constantes d'intégration  $a$  et  $p_0$  sont fixées par la condition aux limites en haut de la couche. Puisque la surface est supposée plane et vu le raisonnement présenté ci-dessus, cette condition s'écrit

$$\mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_2 - \underline{\underline{\sigma}}_1) + \mathbf{t}_M = 0 \quad (5)$$

Si on néglige la viscosité de l'air surplombant le liquide, on a<sup>2</sup>

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 = \mathbf{n} \cdot [-p_{air} \mathbf{1}] = -p_{air} \mathbf{e}_z \quad (6)$$

Dans le fluide, en  $z = H$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 &= \mathbf{n} \cdot \left[ -p(z=H) \mathbf{1} + \mu \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \partial_z u \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial_z u & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathbf{n} \cdot \left[ -(p_0 - \rho g H) \mathbf{1} + \mu \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right] \\ &= -(p_0 - \rho g H) \mathbf{e}_z + \mu a \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (7)$$

Les relations (2) et (5) donnent alors

$$-p_{air} \mathbf{e}_z + (p_0 - \rho g H) \mathbf{e}_z - \mu a \mathbf{e}_x - \gamma_0 b \frac{dT}{dx} \mathbf{e}_x = 0$$

On en déduit donc  $p_0 = p_{air} + \rho g H$  et  $a = -\frac{\gamma_0 b}{\mu} \frac{dT}{dx}$ . En définitive, les champs de vitesse et de pression s'écrivent donc<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left( -\frac{\gamma_0 b}{\mu} \frac{dT}{dx} \right) z \mathbf{e}_x \\ p &= p_{air} + \rho g (H - z) \end{aligned}$$

Le mouvement qui apparaît dans le fluide fournit un exemple de convection *naturelle* : c'est la convection de Marangoni. La convection naturelle est caractérisée par le fait que les déplacements du fluide sont imposés de manière indirecte — au travers d'un gradient de température dans le problème qui nous occupe —, et non pas de manière directe comme c'est le cas dans la convection dite *forcée*, engendrée, par exemple, par des différences de pression, ou par des déplacements de parois solides dans le fluide (piston, hélice,...).

- La convection de Marangoni peut s'observer facilement dans la partie en fusion de la cire d'une bougie (Fig. ci-dessous). On peut aussi la mettre en évidence en approchant un fer à souder chaud d'une surface d'eau préalablement saupoudrée d'une poussière quelconque. Elle intervient également dans la technologie de fabrication des CD (la gravure consiste à utiliser un laser qui fond tout d'abord la fine couche de métal déposée sur le substrat en plastique ; ensuite c'est l'effet Marangoni qui permet au métal fondu de se rétracter pour former les « trous »). Enfin, mentionnons encore que la convection de Marangoni peut avoir un effet néfaste lorsque des cristaux sont fabriqués par solidification à partir d'un

<sup>2</sup> La pression dans l'air est supposée uniforme ( $p_{air} = \text{constante}$ ).

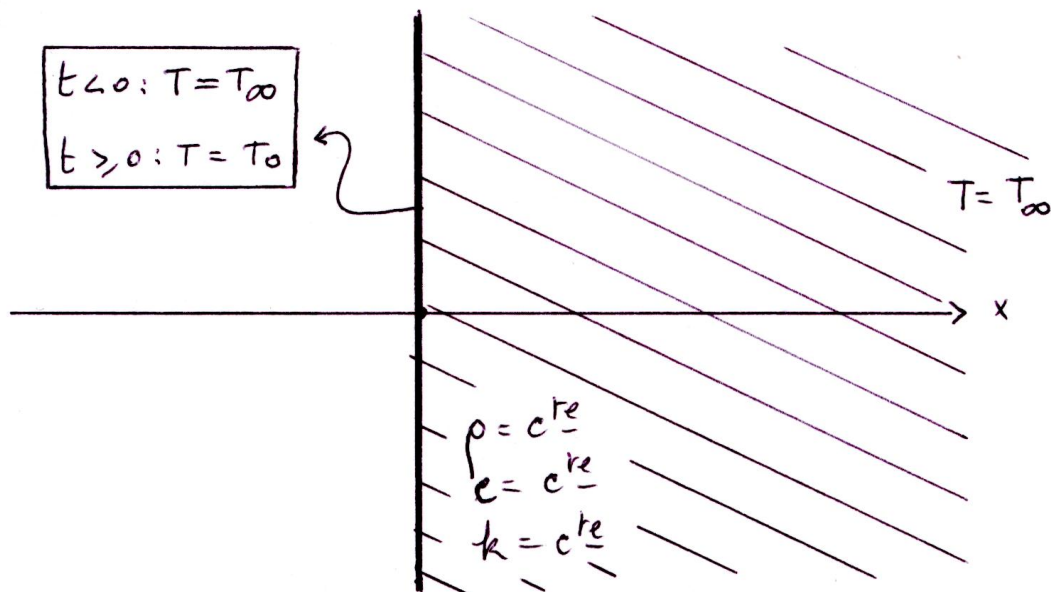
<sup>3</sup>  $dT/dx < 0$  !

produit fondu. En effet, les différences de température qui existent entre le produit fondu et la carotte de cristal solide que l'on en extrait engendrent des différences de tensions à la surface du liquide, et donc des mouvements, qui peuvent nuire aux propriétés d'homogénéité du produit fini.



## 6.9 Application : la diffusion de la chaleur

- Milieu semi-infini ( $x \geq 0$ ) solide incompressible à température  $T_\infty$  dont frontière portée à température  $T_0$  en  $t = 0$ .



- Equation de l'énergie

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r - p \nabla \cdot \mathbf{v} - p^v \nabla \cdot \mathbf{v} + \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^v : \underline{\underline{\hat{V}}}$$

ou encore

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

Si le milieu incompressible, on a  $u = cT$ , où  $c = c_v = c_p$  est la chaleur spécifique. En tenant compte de la loi de Fourier et en supposant que la chaleur spécifique et la conductivité thermique sont des constantes, ce qui constitue une hypothèse acceptable si les écarts de température envisagés ne sont pas trop importants, on déduit l'équation d'évolution du champ de température (« équation de diffusion de la chaleur »)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (1)$$

avec  $\kappa = \frac{k}{\rho c}$  la diffusivité thermique. Cette équation est une équation aux dérivées partielles de type *parabolique*.

- Dimensions physiques de la diffusivité thermique :

$$[K] = L^2 T^{-1} \quad \Rightarrow \quad [\sqrt{Kt}] = L$$

- Essayons de voir s'il existe une solution  $T$  de l'équation de la chaleur qui serait fonction de la variable réduite adimensionnelle  $\frac{x}{\sqrt{Kt}}$  :

$$T = T\left(\frac{x}{\sqrt{Kt}}\right) = f(u) \quad u = \frac{x}{\sqrt{Kt}} \quad (2)$$

- Portons cette expression dans les deux membres de l'équation (1) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u) \frac{x}{\sqrt{K}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} \frac{x}{\sqrt{K}} f'(u)$$

$$\Delta T = \partial_x^2 T = \frac{1}{Kt} f''(u)$$

- Finalement, (1) se réécrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire, non linéaire du second ordre :

$$f''(u) + \frac{1}{2} u f'(u) = 0 \quad (3)$$

Si on pose  $F(u) = f'(u)$ , l'équation (3) devient

$$F' + \frac{1}{2} u F = 0 \quad (4)$$

La solution de cette équation s'écrit  $F = F_0 e^{\frac{-u^2}{4}}$  et on a donc

$$f = \int F_0 e^{\frac{-u^2}{4}} du$$

Il vient donc pour la fonction<sup>4</sup>  $f$  :

$$f = A \operatorname{Erf}\left(\frac{u}{2}\right) + B$$

et donc, pour le champ de température

$$T(x,t) = A \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) + B$$

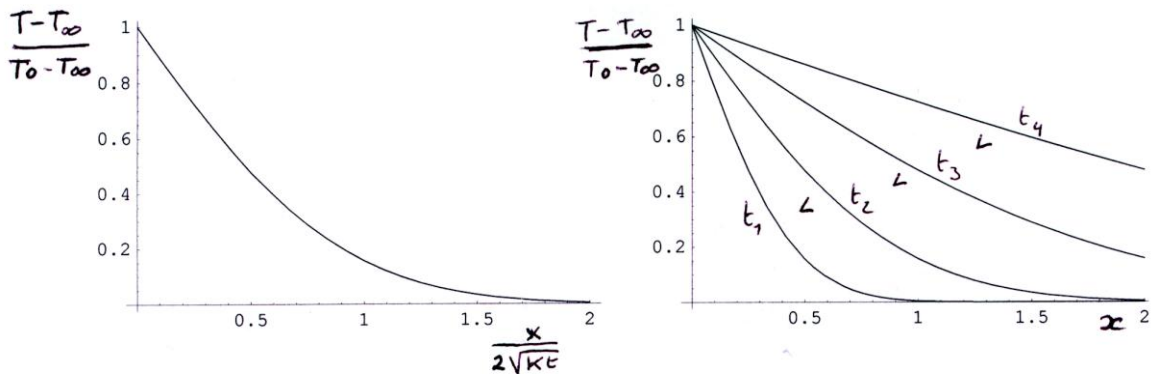
Les conditions aux limites permettent de fixer les constantes d'intégration :

$$T(x=0, t > 0) = T_0 \text{ implique } B = T_0$$

$$T(x=\infty, t) = T_\infty \text{ implique } A = T_\infty - T_0$$

- Il vient donc finalement :

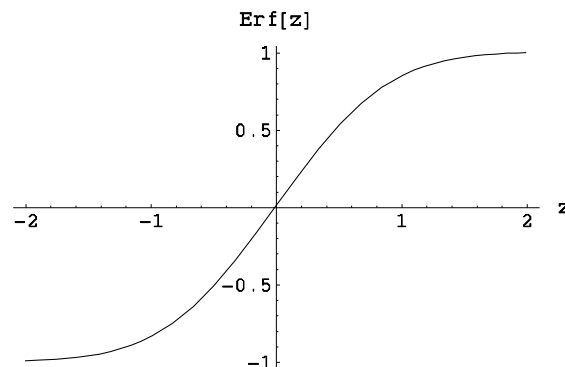
$$\frac{T(x,t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right)$$



- Essayons à présent de caractériser la « vitesse de propagation » de la perturbation imposée en  $x = 0$  et  $t = 0$ .

- ✓ On peut tout d'abord remarquer qu'un changement de température est perçu immédiatement dans tout l'espace. Ce point de vue nous amène donc à une vitesse de propa-

<sup>4</sup> Rappelons que la fonction d'erreur est définie par  $\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$



gation *infinie*, typique des équations paraboliques : dès que le contact thermique est établi en  $x = 0$ , on « sent quelque chose » partout.

- ✓ On peut aussi noter qu'il faut un temps infini pour la température en un point du domaine ( $x > 0$ ) devienne *égale* à la température imposée à la frontière. La vitesse de propagation de la « totalité » de la perturbation imposée en surface est donc *nulle* de ce point de vue.
- ✓ Les deux vitesses dont nous venons de parler, qui sont infinie ou nulle, sont donc peu significatives et il est commode d'introduire de la manière suivante une notion de vitesse effective de propagation de la perturbation. On dira que la perturbation arrive en un point  $x$  dès qu'on ressent en ce point une fraction donnée, strictement comprise entre 0 et 1 (par exemple 50%), de la perturbation imposée à la frontière du domaine. On peut alors évaluer la distance  $d$  parcourue par la perturbation en un temps  $t$ . On a :

$$\frac{T(d,t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{d}{2\sqrt{Kt}}\right) = 0.5$$

Puisque  $\operatorname{Erf}(z) = 0.5$  implique que  $z = 0.477 \approx 0.5$ , on déduit donc<sup>5</sup>

$$d \approx \sqrt{\kappa t} \quad (6.9.1)$$

La distance parcourue varie donc comme la racine carrée du temps, ce qui est typique des phénomènes de diffusion. On déduit aussi du raisonnement qui vient d'être fait que le temps  $\tau$  nécessaire pour qu'une perturbation se propage sur une distance  $d$ , que l'on appelle le temps caractéristique de diffusion sur une distance  $d$ , est donné par

$$\tau = \frac{d^2}{\kappa} \quad (6.9.2)$$

On voit donc que le mécanisme de diffusion est assez inefficace pour propager une information sur de longues distances ou de longs intervalles de temps. Ainsi, dans l'air par exemple, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{Kt} &= 1 \text{ cm pour } t = 10 \text{ sec} \\ \sqrt{Kt} &= 10 \text{ cm pour } t = 10^3 \text{ sec} \approx 20 \text{ min} \end{aligned}$$

Une notion de *vitesse effective* de propagation  $v_{eff}$  peut alors être définie comme suit :

$$v_{eff} \sim \frac{d}{\tau} = \sqrt{\frac{\kappa}{t}} \quad (6.9.3)$$

et l'on voit qu'elle décroît au cours du temps. On peut interpréter ce résultat en notant que ce sont les gradients de température qui engendrent les flux de chaleur, et donc la propagation de la perturbation. Comme l'effet de cette propagation de la chaleur est de

---

<sup>5</sup> Si on avait choisi une autre proportion de la perturbation totale que les 50% envisagés ici, on aurait de toute façon le résultat fondamental que  $d$  est proportionnel à  $\sqrt{\kappa t}$  !

diminuer les gradients de température (voir p. ex. la figure de droite ci-dessus), il est donc normal que la perturbation évolue de moins en moins rapidement.

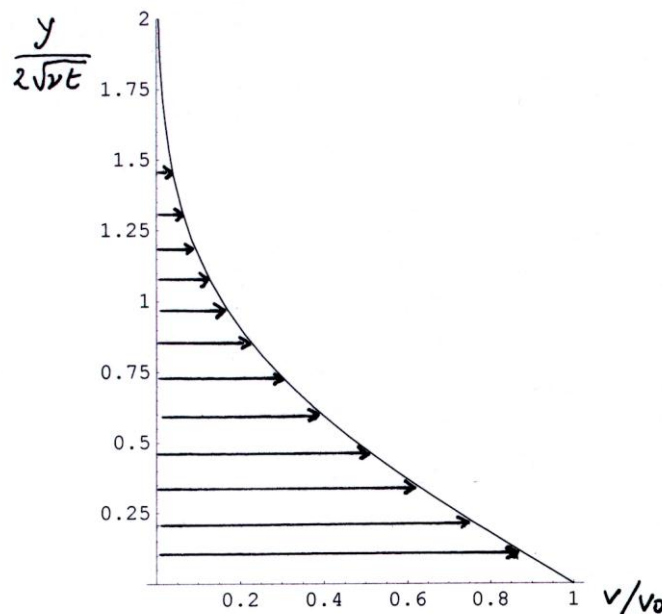
## 6.10 Application : la diffusion de la quantité de mouvement dans un fluide visqueux

Considérons un fluide visqueux au repos remplissant le demi-espace  $y > 0$ . La plaque rigide supportant le fluide est subitement mise en mouvement en  $t = 0$  avec une vitesse  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$  ( $v_0$  est une constante). S'il n'y a pas de gradient de pression horizontal et si le fluide est incompressible et de viscosité constante, on montre facilement que l'équation régissant l'évolution de la composante de la vitesse parallèle à  $x$  (la seule composante non nulle) s'écrit

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}$$

où  $\nu = \mu / \rho$  est la viscosité cinématique du fluide. Cette équation est la même que celle que nous avons rencontrée dans l'étude de la diffusion de la chaleur. Comme les conditions aux limites pour la vitesse sont de la même nature que celles imposées à la température dans le problème précédent, on a directement

$$u = V_0 \left( 1 - \operatorname{Erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right)$$



Le temps caractéristique de diffusion à une distance  $d$  est donné par

$$\tau = \frac{d^2}{\nu} \quad (6.10.1)$$

La distance de diffusion en un temps  $t$  s'écrit quant à elle

$$d \approx \sqrt{\nu t} \quad (6.10.2)$$

Pour l'eau, on a par exemple 3 mm pour 10 sec et 10 cm pour 3 heures.

## 6.11 Le nombre de Reynolds

- Le nombre de Reynolds permet de comparer les mécanismes de convection et de diffusion de la quantité de mouvement dans un écoulement.
- Très souvent, on peut caractériser un écoulement par une vitesse caractéristique  $U$  et par une longueur caractéristique  $L$ . Ainsi, par exemple, dans une conduite de diamètre  $D$  dans laquelle s'écoule un débit (volumique)  $Q$

$$L \sim D$$
$$U \sim \frac{Q}{\pi D^2 / 4}$$

Dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle de dimension caractéristique  $D$  et dont la vitesse au loin est égale à  $U_\infty$ , on aura :

$$L \sim D$$
$$U \sim U_\infty$$

- Un fluide en mouvement transporte évidemment, par le fait même de son déplacement, sa quantité de mouvement. Il s'agit du premier des deux mécanismes de transport de quantité de mouvement que nous voulons envisager : un écoulement transporte de la quantité de mouvement par **convection**. Le temps caractéristique de ce mécanisme de convection de la quantité de mouvement est noté  $\tau_c$  et s'exprime aisément en termes de la longueur et de la vitesse caractéristiques du problème :

$$\tau_c \sim \frac{L}{U}$$

Cette quantité représente l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que la convection propage une perturbation de quantité de mouvement sur une distance de l'ordre de la longueur caractéristique  $L$  de l'écoulement.

- Ainsi qu'on l'a vu au paragraphe 6.9, dans l'exemple de la mise en mouvement subite de la plaque, le phénomène de **diffusion** permet, lui aussi, de transporter de la quantité de mouvement dans un fluide : le fluide est progressivement mis en mouvement par diffusion, ce qui signifie que de la quantité de mouvement lui est apportée. Très souvent, cette propagation de quantité de mouvement par diffusion se fait essentiellement dans une direction perpendiculaire à l'écoulement lui-même. Le temps caractéristique  $\tau_d$  de la diffusion de la quantité de mouvement est donné par

$$\tau_d \sim \frac{L^2}{\nu}$$

où  $\nu = \mu / \rho$  est la viscosité cinématique du fluide. Ce temps caractéristique est l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que la diffusion propage une perturbation de quantité de mouvement sur une distance de l'ordre de  $L$ .

- Le **nombre de Reynolds** est défini comme le rapport (adimensionnel) de ces 2 temps caractéristiques :

$$\text{Re} = \frac{\tau_d}{\tau_c} = \frac{UL}{\nu}$$

- Ce nombre peut aussi être considéré comme une mesure du rapport des ordres de grandeur du terme convectif et du terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{b} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{ordre de grandeur de } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\text{ordre de grandeur de } \nu \Delta \mathbf{v} \sim \frac{\nu U}{L^2}$$

$$\frac{O.G(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})}{O.G(\nu \cdot \nabla \mathbf{v})} \sim \frac{U^2}{L} \frac{L^2}{\nu U} = \frac{UL}{\nu} = \text{Re}$$

- Les caractéristiques globales et générales d'un écoulement dépendent souvent de manière déterminante de la valeur prise par le nombre de Reynolds. Nous allons envisager les deux cas limites d'un nombre de Reynolds très grand et d'un nombre de Reynolds très petit.
- Si  $\text{Re} \ll 1$  ou  $\tau_d \ll \tau_c$  (petites vitesses et/ou petites dimensions et/ou grande viscosité), les phénomènes de diffusion sont « plus rapides » que les phénomènes de convection et les perturbations de vitesse se propagent essentiellement par diffusion. C'est donc le mécanisme de diffusion qui impose l'organisation générale du champ de vitesses.

L'équation de Navier-Stokes peut se simplifier, en négligeant les termes advectifs (non linéaires) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{b} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Cette équation décrit le régime linéaire, dit « régime de Stokes », pour lequel les écoulements sont souvent très stables.

- Si  $\text{Re} \gg 1$  ou  $\tau_d \gg \tau_c$  (grandes vitesses et/ou grandes dimensions et/ou faible viscosité), les phénomènes convectifs sont déterminants dans l'organisation du champ des vitesses et les termes non linéaires acquièrent une importance irréductible. Les écoulements sont généralement beaucoup moins stables et la possibilité de solutions multiples apparaît. Lorsque le nombre de Reynolds devient très grand, les écoulements deviennent turbulents, ce qui implique qu'un comportement spatio-temporel complexe et désordonné fait son apparition dans le système.

Lorsque le nombre de Reynolds est grand, on peut parfois négliger le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes, qui se réduit alors à l'équation d'Euler, mais il faut être prudent. Il s'agit en fait d'un problème de perturbations singulières. Passer à la limite de  $Re \rightarrow \infty$  dans les équations de Navier-Stokes revient à négliger le terme visqueux par rapport au terme advectif, ce qui a pour conséquence de changer l'ordre des équations (les équations d'Euler sont des équations du 1<sup>er</sup> ordre en les dérivées spatiales alors que le terme visqueux des équations de Navier-Stokes est du 2<sup>nd</sup> ordre). L'approximation qui consiste à utiliser l'équation d'Euler du fluide parfait pour le fluide visqueux si  $Re \gg 1$  n'est en fait valable que « loin des parois »<sup>6</sup>. Dans le voisinage des obstacles, les gradients spatiaux de vitesse sont élevés afin de pouvoir satisfaire les conditions aux limites d'annulation de la vitesse sur les surfaces solides. Dans ces circonstances, le nombre de Reynolds construit à partir de la longueur caractéristique  $L$  n'est plus une mesure appropriée du rapport des ordres de grandeur des termes visqueux et convectif (il faudrait plutôt utiliser un nombre de Reynolds local, construit à partir d'une longueur caractéristique locale égale à l'épaisseur de la couche limite).

- On peut illustrer l'influence de la valeur prise par le nombre de Reynolds sur les caractéristiques générales d'un écoulement en envisageant l'exemple de l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre à section circulaire. Le cylindre est de rayon  $D$ , la vitesse du fluide au loin est égale à  $U$  et la viscosité cinématique du fluide vaut  $\nu$ . Le nombre de Reynolds est donc donné par  $Re = UL/\nu$ . En fonction du nombre de Reynolds, les différents régimes d'écoulement autour de l'obstacle sont les suivants.

- $Re \ll 1$

L'écoulement est laminaire et présente une symétrie gauche-droite parfaite (Fig. a ci-dessous).

- $\sim 1 < Re < 47$

Deux tourbillons contra-rotatifs fixes apparaissent en aval du cylindre (écoulement de « recirculation »). La taille de ces tourbillons augmente avec  $Re$  (Fig. b).

- $Re > Re_c = 47$

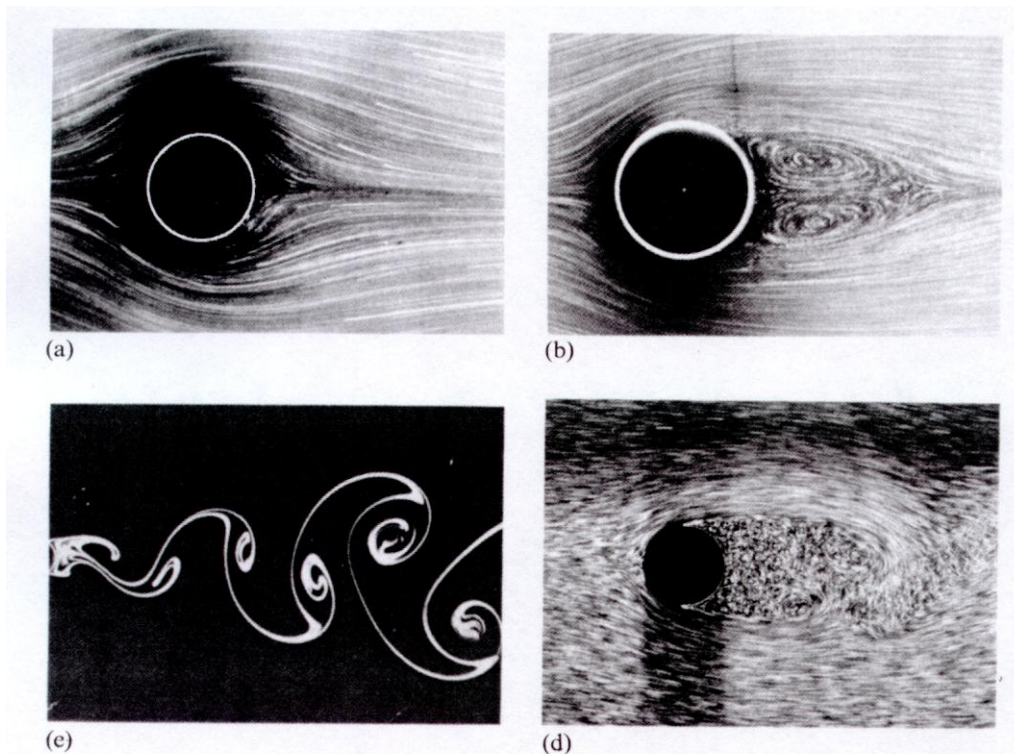
L'écoulement en aval du cylindre devient périodique dans le temps : des tourbillons sont émis à l'arrière le cylindre, alternativement dans le haut du sillage puis dans le bas, et sont emportés par l'écoulement<sup>7</sup>. Cet écoulement porte le nom de « Sillage tourbillonnaire, ou allée, de von Karman » et constitue un exemple célèbre de phénomène d'auto-organisation spatio-temporelle (voir aussi l'illustration de la page 1).

- $Re \gg 1$

Apparition d'un sillage turbulent

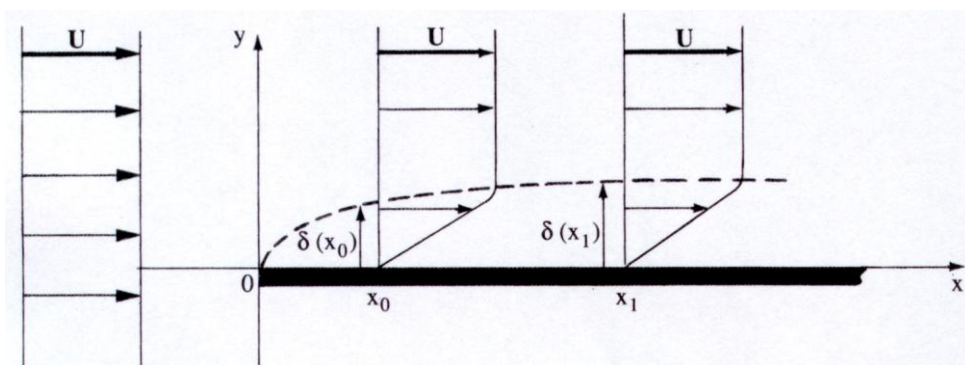
<sup>6</sup> Pour autant bien sûr que l'écoulement loin des obstacles ne soit pas turbulent (lorsque le nombre de Reynolds est grand, la turbulence peut éventuellement envahir la totalité de l'écoulement).

<sup>7</sup> C'est un phénomène de ce type qui a entraîné la rupture du fameux pont de Tacoma.



Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds ; (a) écoulement symétrique entre amont et aval à très faible nombre de Reynolds ( $Re = 0,16$ ) ; (b) apparition de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre ( $Re = 26$ ) ; (c) émission périodique de tourbillons formant une allée de Karman ( $Re = 200$ ) ; (d) sillage turbulent ( $Re = 10^4$ ) (Photos (a, b, c) S. Taneda, *An Album of Fluid Motion* ; photo (d) H. Werlé, ONERA).

- Le nombre de Reynolds permet aussi d'estimer l'épaisseur d'une couche limite le long d'une plaque semi-infinie (Fig. ci-dessous).



Lorsque le fluide rencontre le bord d'attaque en  $x = 0$ , l'écoulement uniforme en provenance de l'amont subit une perturbation due à la présence de la plaque qui impose l'annulation de la vitesse du fluide en  $y = 0$ . Cette perturbation se propage par diffusion dans la direction  $y$  et par convection dans la direction  $x$  à cause du mouvement global du fluide à vitesse  $U$ . L'épaisseur  $\delta(x)$  de la couche limite à une distance  $x$  du bord d'attaque peut

être définie comme la distance « verticale » que la diffusion a fait parcourir à la perturbation pendant que la convection l'a déplacée d'une distance « horizontale » égale à  $x$ . En égalant le temps de diffusion (6.10.1) sur une distance  $\delta(x)$  [ $\delta^2/\nu$ ] au temps de convection sur une distance  $x$  [ $x/U$ ], on trouve immédiatement :

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

où  $\text{Re}_x$  est le nombre de Reynolds local obtenu en prenant la distance  $x$  au bord d'attaque comme échelle locale de longueur. L'épaisseur (relative) de la couche limite est donc d'autant plus petite que le nombre de Reynolds est élevé.

## 6.12 Annexe : la tension de surface

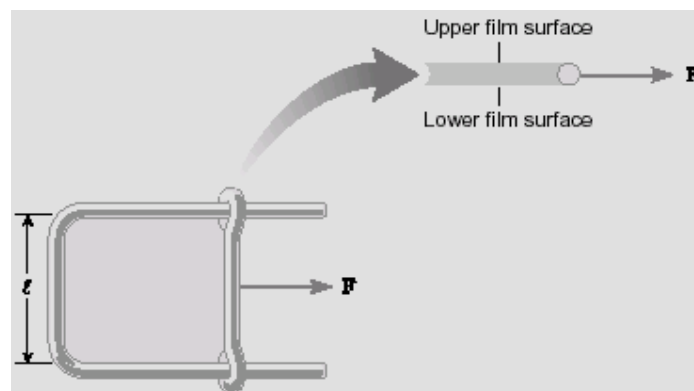
Diverses expériences indiquent que la surface libre d'un liquide se comporte comme une membrane élastique :

- insectes qui courent sur l'eau
- aiguille huilée qui ne coule pas
- arrachement d'un anneau de la surface d'un liquide



La tension de surface, ou tension superficielle, est la force par unité de longueur qui s'exerce sur tout élément de ligne faisant partie de la surface de séparation entre deux milieux fluides non miscibles. En chaque point, cette force s'exerce dans le plan tangent à la surface de séparation et est perpendiculaire à la ligne sur laquelle on l'évalue. L'existence de cette force de surface peut être justifiée par des considérations microscopiques : les tensions de surface proviennent de la différence entre les interactions moléculaires qui s'exercent dans les deux milieux de part et d'autre de la surface de séparation.

En envisageant un film liquide maintenu dans un cadre métallique rectangulaire possédant un côté est mobile, on peut mesurer les tensions de surface (voir Figure).



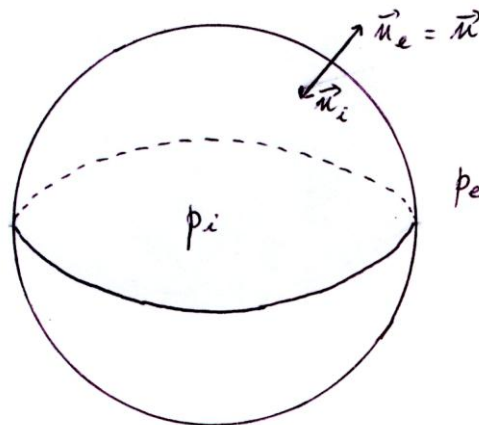
La force  $F$  nécessaire pour empêcher le déplacement du côté mobile que tendent à induire les forces de tension de surface est proportionnelle à la largeur  $L$  du cadre. En tenant compte que les forces de tension de surface s'exercent dans les *deux* faces du film, on écrit

$$F = 2\gamma L$$

où  $\gamma$  est la tension de surface. Pour l'eau, on a  $\gamma = 70 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , alors que la tension superficielle du mercure (la plus élevée de tous les liquides) vaut  $\gamma = 480 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ .

Les forces de tension superficielle qui s'exercent à l'interface entre un liquide et un gaz ou entre deux liquides non miscibles peuvent jouer un rôle important dans l'équilibre et l'écoulement des fluides, dès lors que ceux-ci ont des surfaces libres et ne sont plus simplement en contact avec des parois solides. C'est au travers des conditions aux limites que cette influence se traduit et deux mécanismes distincts peuvent se présenter.

- Envisageons tout d'abord le cas où la tension de surface peut être considérée comme uniforme dans la frontière du fluide dont on étudie le comportement ( $\gamma = \text{constante}$ ). Dans ce cas, il paraît évident que cette tension n'aura aucune influence sur le mouvement du fluide si la surface de celui-ci reste parfaitement plane. En revanche, lorsqu'une "bosse" ou un "creux" existe dans la surface (*i.e.* lorsque la courbure de la surface est non nulle), le comportement de membrane élastique de la frontière va tendre à comprimer (ou étirer) le fluide qui se trouve sous une "bosse" (ou sous un "creux" respectivement), en engendrant éventuellement des mouvements dans le liquide.
- Le rôle de la courbure de l'interface peut être illustré au travers de l'exemple d'une bulle sphérique de savon dont la paroi est un film liquide mince. Nous allons montrer qu'entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle, il existe une différence de pression qui dépend de la tension de surface existant dans les surfaces du film liquide ainsi que du rayon de la bulle (ou, de manière équivalente, de la courbure du film liquide). Afin d'évaluer cette différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle supposée au repos, nous allons écrire les conditions d'équilibre de la demi-bulle « supérieure ».



Les forces de pression exercées sur la demi-bulle par le gaz intérieur s'écrivent :

$$\vec{F}_{p_i} = \int \mathbf{n}_i \cdot \underline{\underline{\sigma}}_i dS = \int \mathbf{n}_i \cdot (-p_i \underline{\underline{\mathbf{1}}}) dS = p_i \int \mathbf{n} dS$$

De même, on a pour l'effet du gaz extérieur :

$$\vec{F}_{p_e} = \int \mathbf{n}_e \cdot \underline{\underline{\sigma}}_e dS = \int \mathbf{n}_e \cdot (-p_e \underline{\underline{\mathbf{1}}}) dS = -p_e \int \mathbf{n} dS$$

Evaluons à présent l'intégrale  $\int \mathbf{n} dS$ . En travaillant en coordonnées sphériques, on a

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

Si  $R$  désigne le rayon de la bulle

$$\int \mathbf{n} dS = \iint_{\substack{0 < \theta < \pi/2 \\ 0 < \phi < 2\pi}} (\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z) R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

La symétrie ou le calcul indiquent que les composantes suivant  $x$  et  $y$  de l'intégrale sont nulles. On a donc :

$$\begin{aligned}\int \mathbf{n} dS &= \iint_{\substack{0 < \theta < \pi/2 \\ 0 < \phi < 2\pi}} \cos \theta \mathbf{e}_z R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi R^2 \mathbf{e}_z \int_{0 < \theta < \pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \pi R^2 \mathbf{e}_z \int_{0 < \theta < \pi/2} \sin 2\theta d\theta \\ &= \pi R^2 \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

La force de pression totale qui s'exerce sur la demi-bulle vaut donc

$$\vec{F}_{p_{tot}} = (p_i - p_e) \pi R^2 \mathbf{e}_z$$

Les forces de tension de surface s'exerçant le long de l'équateur s'écrivent quant à elles :

$$\vec{F}_\gamma = -2\mathbf{e}_z 2\pi R\gamma$$

où le premier facteur « 2 » permet de tenir compte du fait que la tension de surface s'exerce dans les *deux* faces (intérieure et extérieure) du film liquide.

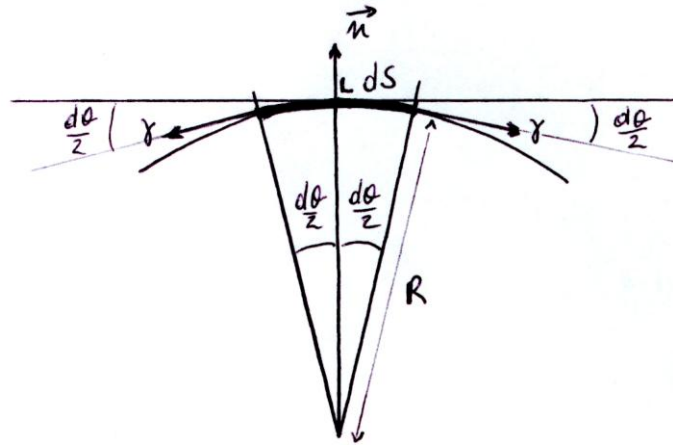
À l'équilibre, les forces de pression compensent exactement les effets de la tension de surface. On en déduit donc que la somme des forces est nulle et que

$$p_i - p_e = \frac{4\gamma}{R} = 2\gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)$$

Dans ce résultat, on fait apparaître explicitement deux termes en  $1/R$  pour des raisons qui apparaîtront plus bas ainsi que le facteur 2 rendant compte de l'existence des deux faces du film liquide. Si à la place de la bulle de savon, on envisage une goutte d'eau dans l'air, ou une bulle d'air dans de l'eau, il n'y a plus qu'une seule interface de séparation entre le liquide et le gaz et un bilan de forces équivalent à celui qui vient d'être fait fournit la "loi de Laplace" :

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) \quad (1)$$

- Nous allons à présent déterminer de manière générale la résultante  $\vec{\mathbf{t}}$  par unité de surface des forces de tension superficielle qui s'exercent sur une surface infinitésimale  $dS$  appartenant à la frontière de séparation entre deux liquides non miscibles. La tension de surface est supposée uniforme dans l'interface, celle-ci peut être déformée et on se limite dans le raisonnement à un problème bi-dimensionnel.



La force due aux tensions de surface qui s'exerce sur  $dS$  peut se décomposer en une composante tangentielle et une composante normale. La composante tangentielle<sup>1</sup> s'obtient en ajoutant les contributions provenant des deux bords gauche et droit de  $dS$  :

$$\gamma \cos \frac{d\theta}{2} - \gamma \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

La composante normale s'écrit quant à elle :

$$\left( -\gamma \sin \frac{d\theta}{2} - \gamma \sin \frac{d\theta}{2} \right) \mathbf{n} \approx -\gamma d\theta \mathbf{n} \approx -\gamma \frac{dS}{R} \mathbf{n}$$

La force totale se réduit donc à la composante normale. La résultante  $\vec{\mathbf{t}}$  par unité de surface des forces de tension superficielle s'écrit donc :

$$\mathbf{t} = -\frac{\gamma}{R} \mathbf{n}$$

Il est important de remarquer que si dans le raisonnement qui précède, on avait utilisé le vecteur normal opposé à celui du dessin, on aurait obtenu la formule ci-dessus avec un signe « plus ». De manière à éviter cette ambiguïté dans le signe de l'expression de  $\vec{\mathbf{t}}$ , il est commode *de donner un signe à la courbure*  $1/R$  intervenant dans l'expression (cette courbure était implicitement supposée positive ci-dessus).

Nous admettons que la courbure  $1/R$  doit être considérée positive si le vecteur  $\mathbf{n}$  pointe vers le centre de courbure (vers la concavité) et qu'elle est au contraire négative si le vecteur normal choisi ne pointe pas vers la concavité. Dans le cas du dessin ci-dessus, la courbure  $1/R$  doit donc être considérée comme négative. Grâce à cette convention, la quantité  $1/R \mathbf{n}$  est indépendante du choix du sens de la normale et est toujours dirigée vers la concavité de la surface.

Avec cette convention de signe, on doit donc récrire le résultat ci-dessus sous la forme finale

<sup>1</sup> Bien remarquer l'importance de l'hypothèse d'uniformité de la tension de surface (mêmes valeurs à gauche et à droite) ! Voir aussi l'effet Marangoni ci-dessous.

$$\mathbf{t} = \frac{\gamma}{R} \mathbf{n}$$

et la force résultante est toujours dirigée vers la concavité de la surface comme l'intuition physique nous l'indique.

- Dans le cas d'un problème réel à 3 dimensions, la formule se généralise sous la forme

$$\mathbf{t} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} \quad (2)$$

où la quantité entre parenthèses est la courbure moyenne de l'interface, avec  $R_1$  et  $R_2$  les rayons principaux de courbure qui sont positifs ou négatifs suivant que le vecteur  $\mathbf{n}$  pointe ou non vers la concavité de la section normale qui leur correspond.

- En reprenant le raisonnement basé sur le bilan des forces s'exerçant sur le cylindre infinitésimal de la Fig. 6.2, on comprend donc que la condition aux limites (6.2.10) s'obtient en ajoutant à (6.2.9) la force supplémentaire donnée dans l'équation (2) ci-dessus : c'est de cette manière qu'une tension de surface uniforme peut influencer sur le mouvement d'un liquide.

---

#### **EFFET MARANGONI**

Le second mécanisme par lequel les tensions de surface peuvent influencer sur le mouvement d'un fluide est basé sur les variations spatiales de la tension de surface (tension non uniforme). Ce phénomène est étudié en détail dans le paragraphe 6.8, point 3, mais on peut déjà souligner qu'il est physiquement évident que si la tension qui règne dans une interface n'est pas uniforme, les zones où la tension est la plus forte vont avoir tendance à attirer du liquide en provenance des régions où  $\gamma$  est plus faible : c'est l'effet Marangoni.

# Bibliographie

## *Références principales*

- E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique physique*, Savoirs Actuels, InterEditions/Editions du CNRS, Paris, 1991.
- L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall International, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

## *Autres références*

- G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1990
- T. E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press, 1995
- Feynman, Leighton et Sands, *Le cours de physique de Feynman* (Electromagnétisme 2, Chap. 38-41), InterEditions, Paris, 1979.
- Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- P. Germain, *Cours de mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1973.
- P. Germain et P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1995.
- S. C. Hunter, *Mechanics of Continuous Media*, Ellis Horwood Limited Publisher, 1976.
- H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1993.
- L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Mir, Moscou, 1971.
- L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, Mir, Moscou, 1967.
- G. E. Mase, *Theory and Problems of Continuum Mechanics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.
- Ryhming I. L., *Dynamique des fluides*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.
- L. Sedov, *Mécanique des milieux continus* (2 vol), Mir, Moscou, 1975.
- R. Simon, *Mécanique analytique*, Deuxième partie, Derouaux, Liège, 1988.
- D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics* (second edition), Oxford University Press, Oxford, 1988.
- C. Truesdell, *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*, Masson, Paris, 1974.